Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 95–98
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Théorie des groupes

Sur les caractères du groupe de Suzuki

Olivier Brunat

Institut G. Desargues, bât. Jean Braconnier, 21, av. Claude Bernard, 69622 Villeurbanne, France

Reçu le 4 mai 2004 ; accepté le 11 mai 2004

Disponible sur Internet le 17 juin 2004

Présenté par Jacques Tits

Résumé

Soit σ l'automorphisme de $\mathrm{Sp}(4, 2^{2n+1})$ dont l'ensemble des points fixes est le groupe de Suzuki. Dans cette Note, on calcule la table des caractères de l'extension $\mathrm{Sp}(4, 2^{2n+1}) \rtimes \langle\sigma\rangle$ que l'on utilise d'une part pour voir que les blocs principaux du groupe de Suzuki et de cette extension sont parfaitement isométriques et d'autre part pour déterminer explicitement les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius associées aux caractères unipotents du groupe de Suzuki. ***Pour citer cet article : O. Brunat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

On the characters of the Suzuki group. Let σ be the automorphism of $\mathrm{Sp}(4, 2^{2n+1})$ so that the set of fixed points is the Suzuki group. We propose in this Note to calculate the irreductible characters of $\mathrm{Sp}(4, 2^{2n+1}) \rtimes \langle\sigma\rangle$, extension of degree two of the symplectic group, and describe two consequences: first, the principal block of the Suzuki group and of this extension are perfectly isometric, and secondly we determine the eigenvalues of Frobenius of the unipotent characters of the Suzuki group. ***To cite this article: O. Brunat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

1. Introduction

Soit $\mathbf{G} = \mathrm{Sp}(4, \overline{\mathbb{F}}_2)$, le groupe symplectique de dimension 4, défini sur une clôture algébrique du corps à 2 éléments. Si l désigne une puissance de 2, on note F_l l'endomorphisme de Frobenius de $\mathbf{G}$ qui consiste à élever les coefficients à la puissance l. Alors le groupe $\mathbf{G}^{F_l}$ des points fixes est le groupe symplectique fini $\mathrm{Sp}(4, l)$. Le groupe $\mathbf{G}$ possède un automorphisme de graphe exceptionnel que l'on note α (voir [3], §12.3). Soit n un entier naturel. Alors le groupe de Suzuki est défini par $\mathrm{Sz} := \mathbf{G}^F$ où $F = F_{2^n} \circ \alpha$; voir [3], §14.1. On constate que $F^2 = F_q$ (où

Adresse e-mail : brunat@igd.univ-lyon1.fr (O. Brunat).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.05.004

$q = 2^{2n+1}$) et donc on a $\mathrm{Sz} \subseteq \mathrm{G} := \mathbf{G}^{F^2} = \mathrm{Sp}(4,q)$. La restriction σ de F à G est un automorphisme d'ordre 2 de G et il est alors naturel de considérer le groupe $\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{G} \rtimes \langle\sigma\rangle$, extension d'ordre 2 de G.

Dans cette Note, on a besoin des caractères irréductibles de G, $\widetilde{\mathrm{G}}$ et Sz. Les tables des caractères de G et Sz étant connues (voir Enomoto [5] et Suzuki [8]), notre premier but est de déterminer celle de $\widetilde{\mathrm{G}}$.

2. Table de caractères de $\widetilde{\mathrm{G}}$

Soit $\Phi = \{a, -a, b, -b, a+b, -(a+b), 2a+b, -(2a+b)\}$ le système de racines de $\mathbf{G}$ et $\Phi^+ = \{a, b, a+b, 2a+b\}$. Le groupe $\mathbf{G}$ est engendré par une famille d'éléments notés $x_r(t)$, $t \in \overline{\mathbb{F}}_q$ paramétrés par Φ (voir [3], Chapitre 4). On obtient en restreignant les scalaires à $\mathbb{F}_q$ les mêmes générateurs pour G. Une description matricielle de ces éléments est donnée dans l'article d'Enomoto (cf. [5], page 76).

On note (g,x) les éléments de $\widetilde{\mathrm{G}}$. On appelle classe extérieure de $\widetilde{\mathrm{G}}$ toute classe de conjugaison de $\widetilde{\mathrm{G}}$ non contenue dans G. Un caractère extérieur de $\widetilde{\mathrm{G}}$ est un caractère qui prend des valeurs non nulles sur les classes extérieures. L'espace des fonctions centrales sera noté $\mathrm{C}(\mathrm{G})$, et $\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$ désigne l' ensemble des caractères irréductibles. On désigne par $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$ l'espace formé des combinaisons linéaires entières d'éléments de $\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$. L'automorphisme σ agit sur $\mathrm{C}(\mathrm{G})$ par $\phi^\sigma(g) = \phi(\sigma(g))$ et stabilise $\mathrm{Irr}(G)$. On dit que $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G})$ est σ-stable si $\chi^\sigma = \chi$.

La théorie de Clifford nous permet de voir que le problème de la construction de la table des caractères de $\widetilde{\mathrm{G}}$ est ramenée à celui de la connaissance des caractères extérieurs sur les classes extérieures. En effet, si ε désigne le caractère linéaire de $\widetilde{\mathrm{G}}$ obtenu en composant la projection canonique de $\widetilde{\mathrm{G}}$ sur $\widetilde{\mathrm{G}}/\mathrm{G}$ avec le caractère non trivial du groupe à deux éléments, on a :

Lemme 2.1. *Soit $\psi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G})$ et posons $\tilde{\psi} := \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\psi)$. Si $\psi = \psi^\sigma$, alors on a $\tilde{\psi} = \chi_\psi + \chi_\psi\varepsilon$ où χ_ψ est un caractère irréductible de $\widetilde{\mathrm{G}}$ dont la restriction à G coïncide avec ψ. Si $\psi \neq \psi^\sigma$, alors $\tilde{\psi}$ est irréductible et les valeurs sont données par $\tilde{\psi}(g,1) = \psi(g) + \psi^\sigma(g)$ et $\tilde{\psi}(g,\sigma) = 0$.*

Soit $E_0 = \{1 \ldots (q-2)/2\}$. On pose $r = 2^{n+1}$. On peut munir $\mathbb{Z}/(q+r+1)\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/(q-r+1)\mathbb{Z}$ de la relation d'équivalence $i \sim j$ si et seulement si $i = j$ ou $i = -j$ ou $i = qj$ ou $i = -qj$. On note respectivement E_1 et E_2 les classes non nulles modulo cette relation sur $\mathbb{Z}/(q+r+1)\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/(q-r+1)\mathbb{Z}$. Les caractères extérieurs de $\widetilde{\mathrm{G}}$ ont pour restriction à G les caractères σ-stables dont voici une paramétrisation. On se rapporte à l'article d'Enomoto pour les notations.

Lemme 2.2. *Les caractères σ-stables de* G *sont* :

- *les quatre caractères $1, \theta_1, \theta_4$ et θ_5 de degré respectif $1, q(q+1)^2/2, q^4$ et $q(q-1)^2/2$.*
- *les $(q-2)/2$ caractères $\chi_1(i,(r-1)i)$, $i \in E_0$, de degré $(q+1)^2(q^2+1)$ et que l'on notera $\chi_{A_0}(i)$.*
- *les $(q+r)/4$ caractères $\chi_5((q-r+1)j)$, $j \in E_1$, de degré $(q^2-1)^2$ et que l'on notera $\chi_{A_1}(j)$.*
- *les $(q-r)/4$ caractères $\chi_5((q+r+1)k)$, $k \in E_2$, de degré $(q^2-1)^2$ et que l'on notera $\chi_{A_2}(k)$.*

Soient γ_0 et τ_0 respectivement des racines primitives complexes $(q-1)$-ième et (q^2+1)-ième de l'unité. On pose

$$\varepsilon_0 = \gamma_0^{(4-2^{n+2})}, \qquad \varepsilon_1 = \tau_0^{(q-r+1)^2}, \qquad \varepsilon_2 = \tau_0^{(q+r+1)^2},$$

racines primitives respectivement $(q-1)$-ième, $(q+r+1)$-ième et $(q-r+1)$-ième de l'unité.

Le groupe de Suzuki possède trois tores maximaux A_0, A_1 et A_2. Ces tores sont cycliques, d'ordre $q-1$, $q+r+1$, $q-r+1$ respectivement ; on note π_0, π_1 et π_2 des générateurs (voir Suzuki [8], p. 123). On pose enfin :

$$\varepsilon_0^i(\pi_0^l) = \varepsilon_0^{il} + \varepsilon_0^{-il}, \quad \varepsilon_1^j(\pi_1^l) = \varepsilon_1^{jl} + \varepsilon_1^{-jl} + \varepsilon_1^{jlq} + \varepsilon_1^{-jlq}, \quad \varepsilon_2^k(\pi_2^l) = \varepsilon_2^{kl} + \varepsilon_2^{-kl} + \varepsilon_2^{klq} + \varepsilon_2^{-klq}.$$

En induisant des caractères irréductibles de certains sous-groupes de $\widetilde{\mathrm{G}}$, on arrive à déterminer la table des caractères de $\widetilde{\mathrm{G}}$. (Les détails paraîtront dans [2].)

Tableau 1
Les caractères de $\widetilde{\mathrm{G}}$

		$(1,\sigma)$	$(x_a(1),\sigma)$	$(x_{a+b}(1),\sigma)$	$(x_a(1)x_{a+b}(1),\sigma)$	(π_0^l,σ)	(π_1^l,σ)	(π_2^l,σ)
		$2q^2(q-1)(q^2+1)$	$4q$	$2q^2$	$4q$	$2(q-1)$	$2(q+r+1)$	$2(q-r+1)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\widetilde{\theta}_4$	1	q^2	0	0	0	1	-1	-1
$\widetilde{\theta}_1$	1	$r(q-1)/2$	$r/2$	$-r/2$	$-r/2$	0	1	-1
$\widetilde{\theta}_5$	1	$r(q-1)/2$	$-r/2$	$-r/2$	$r/2$	0	1	-1
$\widetilde{\chi}_{A_0}(i)$	$i\in E_0$	q^2+1	1	1	1	$\varepsilon_0^i(\pi_0^l)$	0	0
$\widetilde{\chi}_{A_1}(j)$	$j\in E_1$	$(q-1)(q-r+1)$	-1	$r-1$	-1	0	$-\varepsilon_1^j(\pi_1^l)$	0
$\widetilde{\chi}_{A_2}(k)$	$k\in E_2$	$(q-1)(q+r+1)$	-1	$-r-1$	-1	0	0	$-\varepsilon_2^k(\pi_2^l)$

La première ligne contient un ensemble de représentants des classes extérieures de $\widetilde{\mathrm{G}}$ et la deuxième ligne les cardinaux des centralisateurs. Les multipliés par ε n'ont pas été transcrits dans la table.

Théorème 2.3. *La table des caractères de* $\widetilde{\mathrm{G}}$ *est donnée dans le Tableau 1.*

3. Isométrie parfaite

La référence pour ce paragraphe est l'article de Broué [1]. Soit p un diviseur de $|\,\mathrm{Sz}\,|$ qui ne divise pas $[\widetilde{\mathrm{G}}:\mathrm{Sz}]$, et $(K,\ \mathcal{O},\ k)$ un système p-modulaire assez gros pour Sz et $\widetilde{\mathrm{G}}$. On rappelle que le p-bloc principal d'un groupe fini est le p-bloc contenant le caractère trivial. Soient e_0 et f_0 deux idempotents centraux respectivement de $\mathcal{O}\,\mathrm{Sz}$ et $\mathcal{O}\widetilde{\mathrm{G}}$, qui correspondent aux p-blocs principaux $A_0=\mathcal{O}\,\mathrm{Sz}\,e_0$ et $B_0=\mathcal{O}\widetilde{\mathrm{G}}\,f_0$ de Sz et de $\widetilde{\mathrm{G}}$. Pour tout caractère généralisé μ de $\widetilde{\mathrm{G}}\times\mathrm{Sz}$, on définit deux homomorphismes linéaires $I_\mu:\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\mathrm{Sz})\to\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\widetilde{\mathrm{G}})$ et $R_\mu:\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\widetilde{\mathrm{G}})\to\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\mathrm{Sz})$ par

$$\forall g\in\widetilde{\mathrm{G}},\quad I_\mu(\zeta)(g)=\frac{1}{|\,\mathrm{Sz}\,|}\sum_{h\in\mathrm{Sz}}\mu\big(g,h^{-1}\big)\zeta(h)\quad \forall h\in\mathrm{Sz},\quad R_\mu(\eta)(h)=\frac{1}{|\widetilde{\mathrm{G}}|}\sum_{g\in\widetilde{\mathrm{G}}}\mu\big(g^{-1},h\big)\eta(g).$$

Ces deux applications sont adjointes l'une de l'autre pour les produits scalaires usuels de $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\widetilde{\mathrm{G}})$ et $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\mathrm{Sz})$. On dit que le caractère μ est parfait s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

(1) Pour $g\in\widetilde{\mathrm{G}}$ et $h\in\mathrm{Sz}$, on a $\frac{\mu(g,\ h)}{|\mathrm{C}_G(g)|}\in\mathcal{O}$ et $\frac{\mu(g,\ h)}{|\mathrm{C}_H(h)|}\in\mathcal{O}$.
(2) Si $\mu(g,\ h)\neq 0$, alors g est d'ordre premier à p si et seulement si h est d'ordre premier à p.

On note $\mathrm{Irr}(A_0)$ et $\mathrm{Irr}(B_0)$ les caractères irréductibles appartenant aux p-blocs A_0 et B_0 et $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(A_0)$ et $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(B_0)$ les combinaisons linéaires à coefficients entiers d'éléments de $\mathrm{Irr}(A_0)$ et $\mathrm{Irr}(B_0)$. Les deux p-blocs A_0 et B_0 sont dits parfaitement isométriques s'il existe un homomorphisme I_μ entre $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\mathrm{Sz})$ et $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\widetilde{\mathrm{G}})$ tel que μ soit parfait et la restriction de I_μ à $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(A_0)$ induise une isométrie entre $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(A_0)$ et $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(B_0)$. On a alors le résultat (pour les détails de la preuve, voir [2]) :

Théorème 3.1. *Soit p un diviseur premier de $|Sz|$ qui ne divise pas* $[\widetilde{\mathrm{G}}:\mathrm{Sz}]$, *alors il existe une isométrie parfaite entre les p-blocs principaux de* Sz *et* $\widetilde{\mathrm{G}}$.

4. Descente de Shintani et conséquences

Les références pour ce paragraphe sont l'article de Lusztig [7] et le mémoire de Digne–Michel [4]. Le groupe **G** est un groupe réductif connexe. Soit **B** un sous-groupe de Borel rationnel de **G** et **T** un tore maximal rationnel de **B**. On note W le groupe de Weyl de **G**, identifié à $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$. L'endomorphisme F agit naturellement sur W via cette identification, et on remarque que F^2 est l'application identité de W.

Soit $w \in W$ et $X_w = \{g\mathbf{B} \in \mathbf{G}/\mathbf{B} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}$ la variété de Deligne–Lusztig correspondante. Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas q. On note $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_\ell$ des nombres ℓ-adiques, alors pour tout $i \geqslant 0$, on peut associer à la variété X_w un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie $H^i_c(X_w, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, le i-ème espace de cohomologie ℓ-adique à support compact de X_w.

Le groupe $\mathbf{G}^F$ et l'endomorphisme F^2 agissent sur X_w, donc sur $H^i_c(X_w, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, et ces deux actions commutent. Dans le cas où w est un élément de Coxeter, Lusztig prouve que $\bigoplus H^i_c(X_w, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est une somme directe de sous-espaces propres de F^2 qui sont des $\mathbf{G}^F$-modules irréductibles (cf. [7]). Soit V un tel sous-espace propre, alors V est unipotent par construction et les valeurs propres associées ne dépendent pas de w et sont égales, à une puissance positive de q près, à une racine de l'unité ω_V.

Le groupe Sz possède deux caractères cuspidaux unipotents, notés $\mathcal{W}$ et $\overline{\mathcal{W}}$ dans la table de Suzuki [8], p. 143. La notation est choisie telle que

$$\mathcal{W}\big(x_a(1)x_b(1)x_{a+b}(1)\big) = 2^n\sqrt{-1}.$$

Lusztig [7], §7.4, a montré que $\omega_{\mathcal{W}} = (-1 \pm \sqrt{-1})/\sqrt{2}$. On va compléter ce travail en déterminant explicitement le signe. Pour cela, on va calculer les descentes de Shintani de F^2 à F.

Soit f une fonction centrale sur $\widetilde{\mathrm{G}}$, et $g \in \mathrm{Sz}$. Par surjectivité de l'application de Lang, il existe $h \in \mathbf{G}$ tel que $g = h^{-1}F^2(h)$. On définit alors la descente de Shintani de f par $\mathrm{Sh}_{F^2/F}\, f(g) = f(hF(h^{-1}), \sigma)$. Cette application est bien définie, on se reportera à [4] pour plus de détails. On pose $\zeta_0 = (-1 - \sqrt{-1})/\sqrt{2}$. En utilisant les tables des caractères de $\widetilde{\mathrm{G}}$ et Sz, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Avec les notations précédentes, on a* :

$$\mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_1 = -\zeta_0\sqrt{2}/2\mathcal{W} - \bar{\zeta}_0\sqrt{2}/2\overline{\mathcal{W}} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\tilde{\theta}_5 = -\bar{\zeta}_0\sqrt{2}/2\mathcal{W} - \zeta_0\sqrt{2}/2\overline{\mathcal{W}} \quad \textit{si } n \textit{ est impair},$$
$$\mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_1 = -\bar{\zeta}_0\sqrt{2}/2\mathcal{W} - \zeta_0\sqrt{2}/2\overline{\mathcal{W}} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\tilde{\theta}_5 = -\zeta_0\sqrt{2}/2\mathcal{W} - \bar{\zeta}_0\sqrt{2}/2\overline{\mathcal{W}} \quad \textit{si } n \textit{ est pair}.$$

En remarquant que le théorème principal III, 2.3 de Digne–Michel [4] s'applique encore à un endomorphisme dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius, et en l'appliquant au caractère θ_1 qui est dans la série principale de G on obtient :

Corollaire 4.2. *La racine de l'unité associée à $\mathcal{W}$ est ζ_0 (si n est impair) ou $\overline{\zeta_0}$ (si n est pair). Celle associée à $\overline{\mathcal{W}}$ est la conjuguée de celle associée à $\mathcal{W}$.*

Ces résultats complètent l'article de Geck–Malle [6] en confortant le choix de la définition de la matrice de Fourier donnée dans le §5, p. 180.

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement M. Geck, pour sa patience et ses nombreuses suggestions.

Références

[1] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, Astérique 181–182 (1990) 61–92.
[2] O. Brunat, Table des caractères de $\mathrm{Sp}(4, 2^{2n+1}) \rtimes \langle\sigma\rangle$ et conséquences, en préparation.
[3] R.W. Carter, Simple Groups of Lie Type, Wiley, New York, 1972.
[4] F. Digne, J. Michel, Fonctions $\mathcal{L}$ des variétés de Deligne–Lusztig et descente de Shintani, Mém. Soc. Math. France (1985).
[5] H. Enomoto, The characters of the finite symplectic group $\mathrm{Sp}(4, q)$, $q = 2^f$, Osaka J. Math. 9 (1972) 75–94.
[6] M. Geck, G. Malle, Fourier transforms and Frobenius eigenvalues for finite Coxeter groups, J. Algebra 260 (2003) 162–193.
[7] G. Lusztig, Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius, Invent. Math. 28 (1976) 101–159.
[8] M. Suzuki, On a class of doubly transitive groups. I, Ann. Math. 75 (1962) 105–145.