Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 203–208
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Géométrie différentielle

Groupes d'holonomie et spineurs parallèles sur les variétés pseudo-riemanniennes complètement réductibles

Aziz Ikemakhen

Faculté des sciences et techniques, B.P. 549, Gueliz, Marrakech, Maroc

Reçu le 14 novembre 2003 ; accepté après révision le 27 avril 2004

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous caractérisons, par leur groupe d'holonomie, les variétés pseudo-riemanniennes spinorielles, complètement réductibles qui admettent des spineurs parallèles. ***Pour citer cet article : A. Ikemakhen, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Holonomy groups and parallel spinors on totally reducible pseudo-Riemannian manifolds. We characterize, by their holonomy groups, the totally reducible spin pseudo-Riemannian manifolds which admit parallel spinors. ***To cite this article: A. Ikemakhen, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abridged English version

One of the problems that remain open in differential geometry is:
(P) What are the possible holonomy groups of simply connected pseudo-Riemannian spin manifolds $M^{(p,q)}$ which admit parallel spinors?

In [8] and [3] Wang, Baum and Kath solved the problem when $M^{(p,q)}$ are irreducible and non-locally symmetric. In this case, parallel spinors occur exactly for the holonomy representations $\mathrm{SU}(p', q')$, $(p = 2p', q = 2q')$, $\mathrm{Sp}(p', q')$, $(p = 4p', q = 4q')$, G_2, $G^*_{2(2)}$, $G_2^{\mathbb{C}}$, Spin(7), Spin(4, 3) and $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(7)$.

The proof of this result is based first on the fact that the space of parallel spinors fields can be identified with the vector space

$$V_H := \{u \in \Delta_{p,q};\ \lambda^{-1}(H) \cdot u = u\}$$

Adresse e-mail : ikemakhen@fstg-marrakech.ac.ma (A. Ikemakhen).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.04.029

of all elements of the spinor module $\Delta_{p,q}$ which are invariant under the action of the holonomy group of the spinor connection ($\cdot$ is the Clifford multiplication, H the holonomy group of (M, g) and $\lambda : \mathrm{Spin}(p, q) \to \mathrm{SO}(p, q)$ is the double covering of $\mathrm{SO}(p, q)$ by $\mathrm{Spin}(p, q)$). Secondly, it is based on the list of Berger of the possible holonomy groups of irreducible non-locally symmetric pseudo-Riemannian manifolds (see [5]) and on the examination, one by one, of the groups H of this list that verify $V_H \neq 0$.

In [7], Leistner also solved the problem in the Lorentzian case. The author also characterized, by their holonomy groups, the simply connected spin pseudo-Riemannian manifolds which admit parallel pure spinors (see [6]). In this Note, we give a complete answer to the problem **(P)** when the manifolds are totally reducible (every invariant subspace by the holonomy representation admits an invariant complementary).

1. Introduction

L'un des problèmes qui restent ouvert en géométrie différentielle est le suivant :

(P) Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne simplement connexe et spinorielle. Si elle supporte un spineur parallèle non trivial, quels sont ses groupes d'holonomie possibles ? Autrement dit quelles sont les restrictions sur le groupe d'holonomie d'une telle variété ?

Dans [8] et [3] Wang, Baum et Kath ont résolu le problème lorsque la variété est irréductible et non localement symétrique. Dans ce cas les groupes holonomie possibles sont : $\mathrm{SU}(p', q')$, $(p = 2p', q = 2q')$, $\mathrm{Sp}(p', q')$, $(p = 4p', q = 4q')$, G_2, $G^*_{2(2)}$, $G_2^{\mathbb{C}}$, Spin(7), Spin(4, 3) ou $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(7)$.

La démonstration de ce résultat est basée premièrement sur le fait que l'espace des spineurs parallèles est en bijection avec l'espace $V_H := \{u \in \Delta_{p,q};\ \lambda^{-1}(H) \cdot u = u\}$ des vecteurs fixes par le groupe d'holonomie de la connexion spinorielle ($\Delta_{p,q}$ est le module des spineurs, $\cdot$ la multiplication de Clifford, H le groupe d'holonomie de (M, g) et $\lambda : \mathrm{Spin}(p, q) \to \mathrm{SO}(p, q)$ est le revêtement à deux feuillets de $\mathrm{SO}(p, q)$ par $\mathrm{Spin}(p, q)$). Deuxièmement, elle est basée sur la liste de Berger des groupes d'holonomie possibles d'une variété pseudo-riemannienne irréductible non localement symétrique (voir [5]) et sur l'examen, un par un, des groupes H de cette liste qui vérifient $V_H \neq 0$.

Dans [7], Leistner a aussi résolu le problème dans le cas lorentzien. L'auteur a caractérisé les variétés pseudo-riemanniennes simplement connexes qui supportent un spineur pur parallèle non trivial, par leur groupe d'holonomie (voir [6]). Dans cette Note, nous étudions le problème **(P)** lorsque la variété est complètement réductible (tout sous-espace stable par la représentation d'holonomie admet un supplémentaire stable). Par le théorème de décomposition de De Rham–Wu [9] et le résultat de Wang et Baum–Kath, on peut réduire **(P)** au cas où la variété est indécomposable (la représentation d'holonomie ne laisse invariant aucun sous-espace propre non dégénéré) et réductible. Ainsi notre problème sera réduit à l'étude du cas indécomposable-réductible et complètement réductible.

Soit donc (M, g) une variété pseudo-riemannienne simplement connexe de signature (n, q) et de dimension $m = n + q$. On suppose qu'elle est indécomposable-réductible et complètement réductible. Soit H son groupe d'holonomie en un point de base x. On pose $V = T_x M$. Alors, on peut montrer facilement la proposition suivante :

Proposition 1.1. (i) *La signature de (M, g) est neutre : $q = n$;*

(ii) *La représentation d'holonomie est somme directe de deux représentations $\rho :\to W$ et $\mu :\to W'$ telles que $V = W \oplus W'$, avec : W et W' deux sous-epaces totalement isotropes maximaux de V ;*

(iii) *ρ et μ sont irréducibles ;*

(iv) *La forme quadratique $\langle\,,\rangle = g_x$ identifie W' au dual $W^\star$ de W et μ à la représentation duale de ρ. En plus, W n'admet pas de forme quadratique $\rho(H)$-invariante ;*

(v) *dans la décomposition $V = W \oplus W^\star$, H est un sous-groupe du groupe*

$$\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix};\ A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})\right\}.$$

Tableau 1
Groupes d'holonomie possibles H de (M, g)

$\overline{H}$	W	restrictions	$\overline{H}$	W	restrictions
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^n$	$n \geqslant 1$	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$	$n \geqslant 1$
$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^n$	$n \geqslant 2$	$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$	$n \geqslant 2$
$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{2n}$	$n \geqslant 2$	$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{2n}$	$n \geqslant 2$

Si en plus (M, g) est une variété spinorielle, on a le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne spinorielle simplement connexe de signature (n, q) et de dimension $m = n + q$. On suppose qu'elle est indécomposable-réductible et complètement réductible. Alors (M, g) vérifie les propriétés de la Proposition* 1*. En plus, si on note H le groupe d'holonomie de (M, g) et $\overline{H}$ sa projection sur* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*, les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) *(M, g) admet un spineur parallèle non trivial* ;
(b) $\overline{H} \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$;
(c) *La courbure de Ricci r de (M, g) est nulle* ;
(d) *(M, g) admet un spineur pur* (*réel*) *parallèle non trivial.*

Dans [4] Bérard Bergery a classifié les groupes d'holonomie possibles d'une variété pseudo-riemannienne indécomposable-réductible et complètement réductible et il a démontré le théorème suivant :

Théorème 1.3. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne simplement connexe de signature (n, q) et de dimension $m = n + q$. On suppose qu'elle est indécomposable-réductible, complètement réductible et non localement symétrique. Alors (M, g) vérifie les propriétés de la Proposition* 1.1*. En plus, à une conjugaison près dans* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*, les groupes d'holonomie possibles H de (M, g) sont donnés dans le Tableau* 1*.*

Du Théorème 1.2 et du Théorème 1.3, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.4. *Avec les hypothèses du Théorème* 1.2*, les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) *(M, g) admet un spineur parallèle non trivial* ;
(b) *$\overline{H}$ est l'un des 4 groupes suivants* : $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n',\mathbb{C})$ $(n = 2n')$, $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ *ou* $\mathrm{Sp}(n',\mathbb{C})$ $(n = 4n')$.

2. Représentation spinorielle et multiplication de Clifford

Dans cette section, on précise une représentation spinorielle du groupe spinoriel $\mathrm{Spin}(n, n)$ et on donne une formule intéressante qui nous permet de démontrer le Théorème 1.2. Soit $\langle\ \rangle$ un produit scalaire de signature (n, n) sur $\mathbb{R}^m$ $(m = 2n)$. Soit $\mathcal{C}_{n,n}$ l'algèbre de Clifford de $\mathbb{R}^{n,n} = (\mathbb{R}^m, \langle\ \rangle)$ et $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}_{n,n}$ sa complexifiée. L'algèbre $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}_{n,n}$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}(2^n)$ des matrices complexes carrées d'ordre 2^n. Dans la suite nous réalisons l'un de ces isomorphismes. Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^{n,n}$, notons par ε_j le signe $\varepsilon_j = \langle e_j, e_j\rangle = \pm 1$ et posons $\tau_j = \mathrm{i}$ si $\varepsilon_j = -1$ et $\tau_j = 1$ si $\varepsilon_j = 1$. Posons

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un isomorphisme $\Phi_{2n} : \mathcal{C}^{\mathbb{C}}_{n,n} \to \mathbb{C}(2^n)$ (voir [3]) est donné par :

$$\begin{aligned} &\Phi_{2n}(e_{2j-1}) = \tau_{2j-1} E \otimes \cdots \otimes E \otimes U \otimes T \otimes \cdots \otimes T, \\ &\Phi_{2n}(e_{2j}) = \tau_{2j} E \otimes \cdots \otimes E \otimes V \otimes \underbrace{T \otimes \cdots \otimes T}_{(j-1)\text{-fois}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Si on restreint Φ_{2n} au groupe $\mathrm{Spin}(n,n)$, on obtient une représentation spinorielle de $\mathrm{Spin}(n,n)$. L'espace de la représentation $\Delta_{n,n} = \mathbb{C}^{2^n}$ est dit le module des spineurs. Puisque $\mathbb{C}^m \subset \mathcal{C}^{\mathbb{C}}_{n,n}$, Φ définit ce qu'on appelle la multiplication de Clifford :

$$X \cdot u := \Phi(X)(u) \quad \text{pour } X \in \mathbb{C}^m \text{ et } u \in \Delta_{n,n}.$$

Une base usuelle de $\Delta_{n,n}$ est $u(\nu_n, \ldots, \nu_1) := u(\nu_n) \otimes \cdots \otimes u(\nu_1)$; $\nu_j = \pm 1$, avec $u(1) = \binom{1}{0}$, $u(-1) = \binom{0}{1} \in \mathbb{C}^2$.

Maintenant soit $\lambda : \mathrm{Spin}(\langle\,\rangle) \to \mathrm{SO}(\langle\,\rangle)$ le revêtement à deux feuillets de $\mathrm{SO}(\langle\,\rangle)$. Alors sa dérivée $\lambda_* : \mathrm{spin}(\langle\,\rangle) \to \mathrm{so}(\langle\,\rangle)$ vérifie

$$\lambda_*^{-1}(A) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i e_i \cdot A(e_i), \quad \forall A \in \mathrm{so}(n,n). \tag{2}$$

On considère ensuite W un sous-espace totalement isotrope maximal de $\mathbb{R}^{n,n}$. On choisit $(a_1, \ldots, a_n)$ une base de W et $(a_1^*, \ldots, a_n^*)$ sa base duale au sens de :

$$\langle a_i^*, a_j^* \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle a_i, a_j^* \rangle = \delta_{ij}.$$

On notera W^* le supplémentaire de W engendré par $(a_1^*, \ldots, a_n^*)$. Si on considère la base orthonormale de $\mathbb{R}^{n,n}$:

$$e_{2i-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_i - a_i^*), \quad e_{2i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_i + a_i^*), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

de (2) on obtient facilement :

Proposition 2.1.

$$\lambda_*^{-1}(A) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(A_{|W}).1 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \big(a_i^* \cdot A(a_i) - A(a_i^*) \cdot a_i\big), \quad \forall A \in \mathrm{so}\big(\langle\,\rangle\big), \tag{4}$$

où $A_{|W}$ désigne la restriction de A à W.

3. Preuve du Théorème 1.2

Lemme 3.1. *Si on désigne par R le tenseur de courbure de (M, g), pour $X, Y \in W$ et $X^*, Y^* \in W^*$ on a :*

(i) $R(X, Y) = R(X^*, Y^*) = 0$;
(ii) $r(X, Y) = r(X^*, Y^*) = 0$; $r(X, X^*) = -\,\mathrm{trace}(R(X, X^*)_{|W})$;
(iii) $r = 0$ *si et seulement si* $\overline{H} \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Preuve du Lemme 3.1. Du fait que W est totalement isotrope et invariant par la courbure, on obtient facilement (i).

(ii) D'après la première identité de Bianchi et (i), on a :

$$\begin{aligned} r(X, X^*) &= \mathrm{trace}\big(Z \to R(X, Z)X^*\big) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g\big(R(X, a_i)X^*, a_i^*\big) + \sum_{i=1}^{m} g\big(R(X, a_i^*)X^*, a_i\big) \end{aligned}$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} g\big(R(a_i^*, X^*)X, a_i\big) + 0 - \sum_{i=1}^{m} g\big(R(X^*, X)a_i^*, a_i\big)$$
$$= -\sum_{i=1}^{m} g\big(R(X, X^*)a_i, a_i^*\big) = -\operatorname{trace}\big(R(X, X^*)_{|W}\big).$$

De même on montre que $r(X,Y) = r(X^*, Y^*) = 0$.

(iii) Si $\overline{H} \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, alors $\operatorname{trace}(R(Z,T)_{|W}) = 0, \forall Z, T \in V$. Donc, en x, $r = 0$ et donc $r = 0$ partout. Inversement, si $r = 0$, d'après le théorème d'holonomie d'Ambrose–Singer (voir [1]), $\mathcal{H}$ est engendrée par les transformations $R_{\tau(\gamma)}(Z,T) := \tau(\gamma)^{-1} \circ R(\tau(\gamma)Z, \tau(\gamma)T) \circ \tau(\gamma)$, où γ décrit les courbes de classe C^1 par morceaux, d'origine x, Z, T décrivent T_xM et $\tau(\gamma)$ désigne le transport parallèle le long de γ. Donc

$$\operatorname{trace}\big(R_{\tau(\gamma)}(Z,T)_{|W}\big) = \operatorname{trace}\big(R\big(\tau(\gamma)Z, \tau(\gamma)T\big)_{|\tau(\gamma)W}\big).$$

D'après (ii), trace $A = 0$, $\forall \bar{A} := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$. $\square$

Montrons maintenant dans le Théorème 1.2 que (a) implique (b). On suppose que (M,g) supporte un spineur parallèle φ défini par $0 \neq u \in \Delta_{n,n}$. Or $\nabla_Y(X\cdot\varphi) = D_YX\cdot\varphi + X\cdot\nabla_Y\varphi = 0$, pour X,Y champs de vecteurs sur M, où D est la connexion de Levi-Civita de (M,g), ∇ la connexion spinorielle associée. Donc la distribution $T := \{X \in TM;\ X\cdot\varphi = 0\}$ est parallèle. Et par le principe d'holonomie, le sous-espace $T_x := \{X \in T_xM;\ X\cdot u = 0\}$ est invariant par le groupe d'holonomie H. Dans la suite, on distinguera deux cas :

Premier cas : $T_x = W$ ou $T_x = W^*$.

On suppose que $T_x = W$, le cas $T_x = W^*$ se traite de la même manière. Donc $a_i \cdot u = 0$, pour $i = 1,\dots,n$. D'après (4), on a : $\lambda_*^{-1}(\bar{A})\cdot u = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)u,\ \forall \bar{A} \in \mathcal{H}$. Par suite $\overline{H} \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$.

Deuxième cas : $T_x \neq W$ et $T_x \neq W^*$.

Puisque les représentations ρ et μ sont irréductibles, $T_x = 0$ et donc $T = 0$. Or il est connu que si une variété (M,g) supporte un spineur parallèle, alors $\mathrm{Ric}(TM) \subset T$, où Ric est le tenseur de Ricci de (M,g) (voir par ex. [2]). Par suite $r = 0$.

Montrons maintenant que (b) implique (d). Supposons donc que $H \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. D'après (1), et comme $\forall i$, $A(a_i) \in W$, on a $a_i \cdot u(1,\dots,1) = 0$, pour $i = 1,\dots,n$. Et donc, d'après (4), on a : $\lambda_*^{-1}(\bar{A})\cdot u(1,\dots,1) = 0$. Par conséquent (M,g) admet un spineur pur réel parallèle défini par $u(1,\dots,1)$. L'implication (d) $\Rightarrow$ (a) est triviale. D'où le Théorème 1.2. $\square$

Remarque 1. La liste des holonomies possibles L_{SP} d'une métrique pseudo-riemannienne irréductible et non symétrique g, qui admet un spineur parallèle non trivial, est exactement celle des holonomies possibles L_{RP} qui forcent g à être Ricci-plate (voir introduction). La question qui se pose est donc : Existe-il une preuve directe de ce fait ?

Le Théorème 1.2 ((a) $\Leftrightarrow$ (c)) renforce le sentiment dans cette direction, lorsque g est complétement réductible et non irréductible.

Remerciements

Je remercie L. Bérard Bergery qui m'a parlé de sa prépublication et je remercie également Ch. Boubel qui m'a fait la Remarque 1.

Références

[1] W. Ambrose, I.M. Singer, A theorem on holonomy, Trans. Amer. Math. Soc. 79 (1953) 428–443.
[2] H. Baum, Th. Freidrich, R. Gruneward, I. Kath, Twistor and Killing Spinors on Riemannian Manifolds, Teubner-Text, vol. 124, Teubner, Stuttgart–Leipzig, 1991.

[3] H. Baum, I. Kath, Parallel spinors and holonomy groups on pseudo-Riemannian spin manifolds, Ann. Global. Anal. Geom. 17 (1999) 1–17.
[4] L. Bérard Bergery, Sur la classification des variétés pseudo-riemanniennes complètement réductibles, Prépub. Institu Elie Cartan (à paraître).
[5] M. Berger, Sur les groupes d'holonomie des variétés à connection affine et des variétés riemanniennes, Bull. Soc. Math. France 83 (1955) 279–330.
[6] A. Ikemakhen, Parallel pure spinors and holonomy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 179–184.
[7] Th. Leistner, Holonomy and Parallel Spinors in Geometry Lorentzian, PhD thesis, Humbold-University of Berlin, 2003.
[8] M.Y. Wang, Parallel spinors and parallel forms, Ann. Global Anal. Geom. 7 (1) (1989) 59–68.
[9] H. Wu, On the de Rham decomposition theorem, Illinois J. Math. 8 (1964) 291–311.