Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 109–114
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse mathématique

Opérateurs de composition sur l'algèbre de Wiener–Dirichlet

Catherine Finet [a], Daniel Li [b], Hervé Queffélec [c]

[a] *Institut de mathématique, université de Mons-Hainaut, « Le Pentagone », avenue du Champ de Mars, 6, 7000 Mons, Belgique*
[b] *Laboratoire de mathématiques de Lens, université d'Artois, rue Jean Souvraz, SP18, 62307 Lens cedex, France*
[c] *UFR de mathématiques, université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France*

Reçu le 3 mars 2004 ; accepté le 27 avril 2004

Disponible sur Internet le 9 juin 2004

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Dans cette Note, nous étudions les opérateurs de composition sur l'algèbre $\mathcal{A}^+$ des séries de Dirichlet absolument convergentes. Nous caractérisons les opérateurs de composition bornés dans $\mathcal{A}^+$, les opérateurs de composition automorphes et isométriques de $\mathcal{A}^+$. Nous étudions aussi leur compacité. ***Pour citer cet article : C. Finet et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Composition operators defined on the Wiener–Dirichlet algebra. In this Note, we study composition operators defined on the algebra $\mathcal{A}^+$ whose elements are absolutely convergent Dirichlet series. We characterize bounded composition operators in $\mathcal{A}^+$, the composition automorphisms and the composition isometries. We also study their compacity. ***To cite this article: C. Finet et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

In this Note, we study composition operators on the 'Wiener–Dirichlet' algebra $\mathcal{A}^+$ of absolutely convergent Dirichlet series. We extend some results of Newman [9] and Harzallah [7].

We first start with the study of *boundedness* of composition operators $C_\phi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^+$ associated with an analytic function $\phi : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0$, where $\mathbb{C}_0$ is the half plane $\operatorname{Re} s > 0$. We denote by $\mathcal{D}$ the space of convergent Dirichlet series. We shall use the following:

Adresses e-mail : catherine.finet@umh.ac.be (C. Finet), daniel.li@euler.univ-artois.fr (D. Li), queff@math.univ-lille1.fr (H. Queffélec).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.04.026

Theorem 0.1 [4, Theorem 4]. *Let ϕ generating a bounded composition operator on $\mathcal{A}^+$ then we have necessarily*

$$\phi(s) = c_0 s + \varphi(s), \quad c_0 \in \mathbb{N} \text{ and } \varphi \in \mathcal{D}. \tag{1}$$

We will therefore restrict ourselves to nonconstant symbols ϕ of the form (1).

Theorem 0.2. *C_ϕ is bounded in $\mathcal{A}^+$ if and only if $(\|n^{-\phi}\|)_{n=1}^\infty$ is bounded.*

We study the *automorphisms of* $\mathcal{A}^+$. A point of view due to Bohr [1] identifies $\mathcal{A}^+$ with $A^+(\mathbb{T}^\infty)$ the algebra of absolutely convergent Taylor series in countably many variables. Therefore we will be led to the intermediate study of composition operators on $A^+(\mathbb{T}^k)$ (the k-dimensional analog of $A^+(\mathbb{T}^\infty)$) and $A^+(\mathbb{T}^\infty)$. We only give the result for composition operators on $\mathcal{A}^+$.

Theorem 0.3. *Let C_ϕ be a composition operator on $\mathcal{A}^+$. C_ϕ is an automorphism if and only if $\phi(s) = s + \mathrm{i}\tau$.*

We also study the *isometries* of $A^+(\mathbb{T}^k)$, $A^+(\mathbb{T}^\infty)$, $\mathcal{A}^+$. We only give the result on $\mathcal{A}^+$.

Theorem 0.4. *Let $\phi : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0$ be an analytic function such that ϕ has a continuous extension to $\overline{\mathbb{C}}_0$ with $\operatorname{Re}\phi(s) = 0$ if $\operatorname{Re} s = 0$. Then*

(a) $\phi(s) = c_0 s + \mathrm{i}\tau$, $c_0 \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}$,
(b) *C_ϕ is an isometry if and only if $c_0 > 0$.*

We finish by the study of the compactness of composition operators on $\mathcal{A}^+$.

Theorem 0.5. *C_ϕ is a compact composition operator on $\mathcal{A}^+$ if and only if $\|n^{-\phi}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, and then $\operatorname{Re}\phi(s) \geqslant \delta$ for some positive δ.*

1. Introduction

Newman a étudié les opérateurs de composition sur l'algèbre, A^+, des séries de Taylor absolument convergentes :

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n, \quad \text{avec } \|f\| = \sum_{n=0}^\infty |a_n|.$$

Soit une fonction analytique $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ (où $\mathbb{D}$ désigne le disque unité ouvert), $\phi \in A^+$ et C_ϕ l'opérateur de composition associé $C_\phi(f) = f \circ \phi$. Alors :

(1) C_ϕ est un opérateur de composition borné de A^+ dans A^+ si et seulement si $(\|\phi^n\|)_{n=0}^\infty$ est borné [9].
(2) C_ϕ est un automorphisme de A^+ si et seulement si $\phi(z) = az$, $|a| = 1$ [9].
(3) Kh. Harzallah a montré (voir [7, p. 144]) : C_ϕ est une isométrie dans A^+ si et seulement si $\phi(z) = az^d$, $|a| = 1$, $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Le but de cette Note est de mener une étude similaire dans le cadre de l'algèbre $\mathcal{A}^+$ des séries de Dirichlet absolument convergentes :

$$f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}, \quad \text{avec } \|f\| = \sum_{n=1}^\infty |a_n|.$$

Ici, ϕ sera une fonction analytique : $\mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0$, où $\mathbb{C}_0$ désigne le demi-plan ouvert $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 0\}$.

Nous étudierons aussi la compacité des opérateurs de composition dans A^+ et dans $\mathcal{A}^+$.

Cette Note d'annonce ne contient aucune preuve. Celles-ci seront publiées ultérieurement [3].

2. Opérateurs de composition bornés dans $\mathcal{A}^+$

Dans ce qui suit ϕ désignera une fonction analytique non constante définie sur $\mathbb{C}_0$, et $\mathcal{D}$ l'espace des séries de Dirichlet convergentes, i.e. l'espace des fonctions φ analytiques sur $\mathbb{C}_0$ et représentables par une série de Dirichlet convergente $\sum_1^\infty c_n n^{-s}$ pour $\operatorname{Re} s$ assez grand.

Proposition 2.1 (cf. [4]). *Si ϕ définit un opérateur de composition borné $C_\phi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^+$, alors ϕ est de la forme*

$$\phi(s) = c_0 s + \varphi(s), \quad c_0 \in \mathbb{N},$$

et $\varphi(s) = \sum_{n=1}^\infty c_n n^{-s} \in \mathcal{D}$.

Il est à noter que, comme l'identité n'appartient pas à $\mathcal{A}^+$, la fonction ϕ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{A}^+$ (contrairement à ce qui se passe dans A^+).

Proposition 2.2. *Soit $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, $c_0 \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{D}$, alors :*

(a) *Si $\phi : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0$ et si $\mathbb{C}_\phi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^+$ est borné, $\|n^{-\phi}\|$ est borné.*
(b) *Réciproquement, si $\|n^{-\phi}\|$ est borné, alors $\phi : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0$ et $\mathbb{C}_\phi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^+$ est borné.*

Proposition 2.3. *Soit $\phi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^\infty c_n n^{-s}$, $c_0 \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^\infty |c_n| < \infty$. Si $\operatorname{Re} c_1 \geqslant \sum_{n=2}^\infty |c_n|$, alors C_ϕ est un opérateur de composition borné de $\mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^+$. La réciproque est vraie pour $\phi(s) = c_0 s + c_1 + \sum_{j=1}^\infty c_{q_j} q_j^{-s}$, où $2 \leqslant q_1 < q_2 < \cdots$ sont des entiers multiplicativement indépendants.*

Dans ce qui suit, nous allons voir que la condition $\operatorname{Re} c_1 \geqslant \sum_{n=2}^\infty |c_n|$ n'est pas une condition nécessaire pour que C_ϕ soit un opérateur de composition borné dans $\mathcal{A}^+$.

On peut montrer que, H_k étant le polynôme d'Hermite de degré k (cf. [6]) :

Lemme 2.4. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et x est un nombre réel positif, on a :*

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{|H_k(\lambda)|}{k!} x^k \leqslant c(1+x)^{1/2} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} + x^2\right)$$

où c est une constante positive.

On en déduit :

Proposition 2.5. *Soit r un nombre entier et $\phi(s) = c_0 s + c_1 + c_r r^{-s} + c_{r^2} r^{-2s}$; $c_r, c_{r^2} > 0$ et*

$$\operatorname{Re} c_1 > \frac{(c_r)^2}{8 c_{r^2}} + c_{r^2}. \tag{2}$$

Alors C_ϕ est un opérateur de composition borné dans $\mathcal{A}^+$. Réciproquement, si $C_\phi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^+$ est borné et si $c_r \leqslant 4 c_{r^2}$, on a nécessairement $\operatorname{Re} c_1 \geqslant \frac{(c_r)^2}{8 c_{r^2}} + c_{r^2}$.

La condition (2) est moins restrictive que la condition $\operatorname{Re} c_1 \geqslant c_r + c_{r^2}$ dès que $c_r < 8 c_{r^2}$.

3. Automorphismes

Nous caractérisons les fonctions analytiques $\phi : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0$ qui engendrent des automorphismes $C_\phi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^+$. Dans un premier temps, nous nous intéressons au cas du polydisque $\mathbb{D}^k$ (pour k entier $\geqslant 1$). L'algèbre $A^+(\mathbb{T}^k)$ est définie comme suit :
$f \in A^+(\mathbb{T}^k)$ si et seulement si

$$f(z) = \sum_{n_1,\ldots,n_k \geqslant 0} a(n_1,\ldots,n_k) z_1^{n_1} \cdots z_k^{n_k}, \quad z = (z_1,\ldots,z_k) \in \mathbb{D}^k$$

avec

$$\|f\| = \sum_{n_1,\ldots,n_k \geqslant 0} \big|a(n_1,\ldots,n_k)\big| < +\infty.$$

On montre que, si $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_k)$ est une application analytique de $\mathbb{D}^k$ dans $\mathbb{D}^k$, ϕ engendre un opérateur de composition $C_\phi : A^+(\mathbb{T}^k) \to A^+(\mathbb{T}^k)$ si et seulement si

$$\|\phi_j^n\| \leqslant C \quad \text{pour } j = 1,\ldots,k \text{ et } n = 0, 1, \ldots. \tag{3}$$

Rappelons quels sont les automorphismes analytiques de $\mathbb{D}^k$:

Lemme 3.1 [8]. *Les automorphismes analytiques de $\mathbb{D}^k$ sont les applications de la forme* :

$$\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_k), \quad \text{où } \phi_j(z) = \epsilon_j \frac{z_{\sigma(j)} - a_j}{1 - \bar{a}_j z_{\sigma(j)}},$$
$$z \in \mathbb{D}^k,\ 1 \leqslant j \leqslant k,\ |\epsilon_j| = 1,\ |a_j| < 1 \text{ et } \sigma \text{ est une permutation de } \{1,\ldots,k\}.$$

On remarque que les automorphismes de $\mathbb{D}^k$ « séparent » les variables. On en déduit la proposition suivante (dans laquelle $\phi : \mathbb{D}^k \to \mathbb{D}^k$ est une application analytique) :

Proposition 3.2. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) $C_\phi : A^+(\mathbb{T}^k) \to A^+(\mathbb{T}^k)$ *est un automorphisme,*
(2) ϕ *est de la forme* :

$$\phi(z) = (\epsilon_1 z_{\sigma(1)},\ldots,\epsilon_k z_{\sigma(k)}),$$

où $z \in \mathbb{D}^k$ *et* σ *est une permutation de* $\{1,\ldots,k\}$.

Nous considérons maintenant le cas du polydisque infini $\mathbb{D}^\infty$. On se place dans l'espace de Banach c_0 et on considère la boule unité ouverte de c_0 : $B = \mathbb{D}^\infty \cap c_0$.

L'algèbre de Wiener $A^+(\mathbb{T}^\infty)$ est définie comme suit [2] : $f \in A^+(\mathbb{T}^\infty)$ si et seulement si f est une fonction analytique dans B et de série de Taylor absolument convergente :

$$f(z) = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha, \quad \text{avec } \|f\| = \sum_\alpha |a_\alpha| < \infty,$$

$z = (z_j)_{j \geqslant 1} \in B$, $\alpha \in \mathbb{N}^{(\infty)}$ et $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_r^{\alpha_r}$ si $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$. L'analogue du Lemme 3.1 est alors :

Lemme 3.3 [5]. Théorème analytique de Banach–Stone. *Les automorphismes analytiques de B sont les applications de la forme* :

$$\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_k,\ldots),$$

où $\phi_j(z) = \epsilon_j \frac{z_{\sigma(j)} - a_j}{1 - \bar{a}_j z_{\sigma(j)}}$, $z \in B$, $j \geqslant 1$, $|\epsilon_j| = 1$, $(a_j)_{j=1}^\infty \in B$ *et* σ *est une permutation de l'ensemble* $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Nous obtenons, en notant, pour $u=(u_n)_{n\geqslant 1}\in B$, $(T_j u)_n = u_n$ si $n\neq j$ et 0 sinon :

Proposition 3.4. *Supposons que l'application analytique* $\phi=(\phi_j)_{j\geqslant 1}: B\to B$ *satisfait la condition* :

$$\phi_j(T_j z)=0,\quad \forall z\in B,\ \forall j\geqslant 1, \tag{4}$$

et engendre un opérateur de composition C_ϕ *sur* $A^+(\mathbb{T}^\infty)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) C_ϕ *est un automorphisme de* $A^+(\mathbb{T}^\infty)$,
(2) ϕ *est de la forme* : $\phi(z)=(\epsilon_1 z_1,\dots,\epsilon_n z_n,\dots)$, $z\in B$.

Nous considérons maintenant les symboles générant des automorphismes de $\mathcal{A}^+$. Rappelons que H. Bohr [1] a construit un isomorphisme isométrique $D:\mathcal{A}^+\to A^+(\mathbb{T}^\infty)$ ayant la propriété suivante : si l'on note $z^{[s]}=(p_j^{-s})_{j\geqslant 1}$, $(p_j)_{j\geqslant 1}$ étant la suite des nombres premiers, et si $\phi:\mathbb{C}_0\to\mathbb{C}_0$ est analytique, alors l'opérateur $T=DC_\phi D^{-1}$ est un opérateur de composition $T=C_{\tilde\phi}: A^+(\mathbb{T}^\infty)\to A^+(\mathbb{T}^\infty)$, où $\tilde\phi: B\to\mathbb{D}^\infty$ est une fonction analytique telle que $\tilde\phi(z^{[s]})=z^{[\phi(s)]}$, $s\in\mathbb{C}_0$. Il n'y a aucune raison, a priori, pour que $\tilde\phi$ applique B dans B. Par contre, si C_ϕ est une surjection, on peut alors montrer que $\tilde\phi$ applique bien B dans B et de plus que $\tilde\phi$ satisfait la condition (4). Puisque $C_{\tilde\phi}$ est un automorphisme, la Proposition 3.4 nous permet de déduire alors :

Proposition 3.5. *Soit* $C_\phi:\mathcal{A}^+\to\mathcal{A}^+$ *un opérateur de composition. Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) C_ϕ *est un automorphisme,*
(2) $\phi(s)=s+\mathrm{i}\tau$, *où* $\tau\in\mathbb{R}$.

4. Isométries

Une élaboration de la méthode de Harzallah permet d'abord de montrer :

Proposition 4.1. *Soit* $\phi=(\phi_j)_{j=1}^k:\mathbb{D}^k\to\mathbb{D}^k$ *une application analytique qui induit un opérateur de composition isométrique* : $A^+(\mathbb{T}^k)\to A^+(\mathbb{T}^k)$. *Alors il existe une matrice carrée* $A=(a_{ij})$, $1\leqslant i,\ j\leqslant k$, $a_{ij}\in\mathbb{N}$, *det* $A\neq 0$, *et des signes complexes* ϵ_j, $1\leqslant j\leqslant k$, *tels que*

$$\phi_i(z)=\epsilon_i z_1^{a_{i1}}\cdots z_k^{a_{ik}},\quad 1\leqslant i\leqslant k \text{ et } z\in\mathbb{D}^k. \tag{5}$$

Inversement, tout symbole ϕ *vérifiant* (5) *engendre un opérateur de composition isométrique sur* $A^+(\mathbb{T}^k)$.

Dans le cas de $\mathbb{T}^\infty$, le résultat n'est plus vrai. Par exemple, $\phi=(\phi_j)_{j=1}^\infty:\mathbb{D}^\infty\to\mathbb{D}^\infty$ défini par $\phi_1(z)=\frac{z_1+z_2}{2}$, $\phi_2(z)=z_3$, $\phi_3(z)=z_4$, etc. engendre une isométrie $C_\phi: A^+(\mathbb{T}^\infty)\to A^+(\mathbb{T}^\infty)$.

Le théorème de Beurling–Helson [10] nous permet cependant de montrer :

Proposition 4.2. *Soit* $\phi=(\phi_j)_{j=1}^\infty:\mathbb{D}^\infty\to\mathbb{D}^\infty$ *une application analytique qui induit un opérateur de composition sur* $A^+(\mathbb{T}^\infty)$. *Supposons, de plus, que* $\phi(\mathbb{T}^\infty)\subset\mathbb{T}^\infty$. *Alors il existe une matrice carrée* $A=(a_{ij})$, $a_{ij}\in\mathbb{N}$, $a_{ij}=0$ *pour* j *grand, et des signes complexes* (ϵ_j) *tels que* :

$$\phi_i(z)=\epsilon_i z_1^{a_{i1}} z_2^{a_{i2}}\cdots z_n^{a_{in}}\cdots,\quad z\in B. \tag{6}$$

Inversement, si ϕ *vérifie* (6), ϕ *définit un opérateur de composition sur* $A^+(\mathbb{T}^\infty)$, *tel que* $\phi(\mathbb{T}^\infty)\subset\mathbb{T}^\infty$, *et dans ce cas,* C_ϕ *est une isométrie de* $A^+(\mathbb{T}^\infty)$ *si et seulement si la matrice* $A^\star$ *est injective.*

Comme précédemment, pour déterminer les opérateurs de composition isométriques de $\mathcal{A}^+$, nous nous ramenons aux opérateurs de composition isométriques de $A^+(\mathbb{T}^\infty)$. L'opérateur $DC_\phi D^{-1}$ est un opérateur de composition $C_{\tilde{\phi}}$ de $A^+(\mathbb{T}^\infty)$; pour pouvoir appliquer la Proposition 4.2, $\tilde{\phi}$ doit appliquer $\mathbb{T}^\infty$ dans $\mathbb{T}^\infty$. Ceci nous amène à imposer une condition « frontière » sur ϕ. On obtient alors :

Proposition 4.3. *Soit une application analytique $\phi : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0$ telle que ϕ se prolonge continûment à $\overline{\mathbb{C}}_0$ avec* $\operatorname{Re}\phi(s) = 0$ *si* $\operatorname{Re} s = 0$. *Alors on a* :

(1) $\phi(s) = c_0 s + \mathrm{i}\tau,\ c_0 \in \mathbb{N},\ \tau \in \mathbb{R}$,
(2) *C_ϕ est une isométrie si et seulement si $c_0 > 0$.*

5. Compacité des opérateurs de composition

Nous terminons par une caractérisation des symboles ϕ générant des opérateurs de composition compacts respectivement dans A^+ et $\mathcal{A}^+$. Nous obtenons :

Proposition 5.1. *Soit ϕ une application analytique dans $\mathbb{D}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) *$C_\phi : A^+ \to A^+$ est compact,*
(2) $\|\phi\|_\infty < 1$.

Proposition 5.2. *Soit ϕ une application analytique dans $\mathbb{C}_0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) *$C_\phi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^+$ est compact,*
(2) $\lim_{n\to+\infty} \|n^{-\phi}\| = 0$.

Remarquons que si $\phi(s) = c_0 s + \sum_1^\infty c_n n^{-s}$, $\sum_1^\infty |c_n| < \infty$ et $\operatorname{Re} c_1 > \sum_2^\infty |c_n|$, alors C_ϕ est un opérateur de composition compact dans $\mathcal{A}^+$. Il est clair que si $\phi(s) = c_0 s + c_1 + \sum_{j=1}^\infty c_q q_j^{-s}$, avec $2 \leqslant q_1 < q_2, \ldots$ des entiers multiplicativement indépendants, alors $C_\phi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^+$ est compact si et seulement si $\operatorname{Re} c_1 > \sum_{j=2}^\infty |c_{q_j}|$.

La preuve de la Proposition 2.5 montre en fait que si r est un entier et $\phi(s) = c_0 s + c_1 + c_r r^{-s} + c_{r^2} r^{-2s}$; $c_r, c_{r^2} > 0$, $\operatorname{Re} c_1 > \frac{(c_r)^2}{8c_{r^2}} + c_{r^2}$, alors l'opérateur de composition $C_\phi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^+$ est compact, et la réciproque est vraie si $c_r \leqslant 4c_{r^2}$.

Références

[1] H. Bohr, Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variablen in der Theorie des Dirichletschen Reihen $\sum a_n/n^s$, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. (1913) 441–448.
[2] B.J. Cole, T.W. Gamelin, Representing measures and Hardy spaces for the infinite polydisk algebra, Proc. London Math. Soc. (3) 53 (1986) 112–142.
[3] C. Finet, D. Li, H. Queffélec, Composition operators on the Wiener–Dirichlet algebra, Preprint.
[4] J. Gordon, H. Hedenmalm, The composition operators on the space of Dirichlet series with square summable coefficients, Michigan Math. J. 46 (1999) 313–329.
[5] L.A. Harris, Schwarz's lemma in normed linear spaces, Proc. Math. Acad. Sci. USA 62 (1969) 1014–1017.
[6] J. Indritz, An inequality for Hermite polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961) 981–983.
[7] J.P. Kahane, Séries de Fourier Absolument Convergentes, Springer-Verlag, New York, 1970.
[8] R. Narasimhan, Several Complex Variables, in: Chicago Lectures in Math., 1971.
[9] D.J. Newman, Homomorphisms of ℓ_+, Amer. J. Math. 91 (1969) 37–46.
[10] W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, Interscience, 1962.