

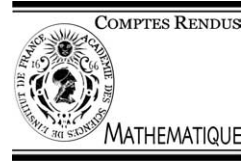


ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 131–136



Géométrie différentielle

# Sur les tissus plans de rang maximal et le problème de Chern

Luc Pirio

*Équipe d'analyse complexe, institut de mathématique de Jussieu, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France*

Reçu le 2 octobre 2003 ; accepté après révision le 29 avril 2004

Disponible sur Internet le 17 juin 2004

Présenté par Charles-Michel Marle

## Résumé

On explique comment il est possible d'obtenir des conditions nécessaires sur des fonctions définissant un germe de tissu plan, pour que celui-ci soit de rang maximal. On applique ensuite cette méthode à l'étude des 5-tissus plans de rang maximal. On montre l'existence d'autres 5-tissus exceptionnels que le tissu de Bol, apportant ainsi une réponse au problème de Chern. **Pour citer cet article :** *L. Pirio, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**On maximal rank planar webs and Chern's problem.** We explain how it is possible to obtain the necessary conditions on functions defining a germ of planar web in order that it be of maximal rank. Then we apply this method to the study of maximal rank 5-webs. We show the existence of many exceptional 5-webs non-equivalent to Bol's web, thus giving an answer to Chern's problem. **To cite this article :** *L. Pirio, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abridged English version

For  $s = 1, 2$ , we denote by  $\mathcal{O}^s$  and  $\mathcal{M}^s$  the space of holomorphic and meromorphic germs in  $(\mathbb{C}^s, 0)$ , respectively. For  $d \geq 3$ , a  $d$ -web  $\mathcal{W}_d$  is the data of a  $d$ -uplet  $(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d)$  of foliation germs  $\mathcal{F}_i$  pairwise in general position. For an introduction to web geometry, one can consult the books [3] (in German), [2,16], or the papers [7,8].

Let  $\mathcal{W}_d$  be a  $d$ -web defined by  $d$  germs of regular foliation  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d$ . By the implicit functions theorem, there exists  $U_i \in \mathcal{O}^2$  such that the (germs of) level curves of  $U_i$  define  $\mathcal{F}_i$ . Then we denote  $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(U_1, \dots, U_d)$  and  $\mathcal{A}[\mathcal{W}_d]$  its space of 'Abelian relations'. By a basic result of Bol in [4], we have the bound  $\text{rg } \mathcal{W}_d \leq (d-1)(d-2)/2$  for the rank  $\text{rg } \mathcal{W}_d := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}[\mathcal{W}_d]$  of the web.

To any planar reduced algebraic curve  $\mathcal{C}$  of degree  $d$ , we can associate a linear  $d$ -web  $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$  on the dual space  $(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)^*$ . The fact that Abelian sums of differentials of the first kind vanish (Abel's theorem) implies that these

Adresse e-mail : [pirio@math.jussieu.fr](mailto:pirio@math.jussieu.fr) (L. Pirio).

‘algebraic webs’ are of maximal rank (see [8]). Inversely (by a result of Lie for  $d = 4$ , see [10,7]), it can be proved that  $d$ -webs of maximal rank are ‘equivalent’ to algebraic webs for  $d = 3, 4$  (i.e. their image by a germ of diffeomorphism is a web  $\mathcal{W}_C$  for a certain algebraic curve  $C \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ).

However, this is no longer true for 5-webs: in [5], Bol has given the example of the web  $\mathcal{B} = \mathcal{W}(x, y, x/y, (1-y)/(1-x), (x/y)(1-y)/(1-x))$  which is of maximal rank although it is non-algebraic. Thus 5-webs of maximal rank are of a particular interest and their classification (up to ‘equivalence’) is an engaging problem in web geometry, as Chern asserted:

“[For planar webs], an important unsolved problem is whether there are other 5-webs of rank 6, besides the algebraic ones and Bol’s example.” ([6], page 27).

The first publication [1] of Abel consists in a description of a general method to solve certain functional equations in two variables. The space of Abelian relations of a web can be interpreted as the space of solutions of a functional equation associated to the web. Then we can apply Abel’s method which will give us: ( $\pi_d$  denotes the projection  $(F_1, \dots, F_d) \in \mathcal{A}[\mathcal{W}] \rightarrow F_d \in \mathcal{O}^1/\mathbb{C}$ )

**Theorem 0.1.** *Let  $U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$  be a  $d$ -uplet of elements of  $\mathcal{O}^2$  defining a germ of web  $\mathcal{W}$ . Then one can construct a germ of differential polynomial  $\mathbf{P}_{\mathcal{W}} \in \mathcal{M}^1[\partial_z]$  such that  $\pi_d(\mathcal{A}[\mathcal{W}]) \subset \text{Sol}(\mathbf{P}_{\mathcal{W}})$ . The coefficients of  $\mathbf{P}_{\mathcal{W}}$  are (non-linear) differential expressions in the  $U_i$ ’s.*

A particular interest of this theorem is that its proof gives an effective way to construct  $\mathbf{P}_{\mathcal{W}}$  from the  $U_i$ ’s, although not in a canonical way (see part 2.2.2 of [13]).

From the obvious equality  $\text{rg}[\mathcal{W}(U_1, \dots, U_d)] = \text{rg}[\mathcal{W}(U_1, \dots, U_{d-1})] + \dim_{\mathbb{C}} \pi_d(\mathcal{A}[\mathcal{W}])$  comes the next corollary

**Corollary 0.2.** *A necessary condition in order that  $\mathcal{W}(U_1, \dots, U_d)$  be of maximal rank is that*

$$\text{Ord}[\mathbf{P}_{\mathcal{W}}] - 1 \geq \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \text{rg}[\mathcal{W}(U_1, \dots, U_{d-1})]$$

where  $\text{Ord}[\mathbf{P}_{\mathcal{W}}]$  is the degree of  $\mathbf{P}_{\mathcal{W}} \in \mathcal{M}^1[\partial_z]$ .

A simple study of the construction of  $\mathbf{P}_{\mathcal{W}}$  in Theorem 0.1 shows that the necessary condition given by Corollary 0.2 corresponds to the vanishing of a finite number of (non-linear) differential expressions in the  $U_i$ ’s. Thus if  $r_g(d-1) := \text{rg}[\mathcal{W}(U_1, \dots, U_{d-1})]$  is known, one can find  $(d-1)(d-2)/2 - r_g(d-1)$  differential equations that  $U_d$  must satisfy in order that  $\mathcal{W}(U_1, \dots, U_d)$  be of maximal rank.

An important fact is that for a given case, all these results can be made explicit: for instance, we can get an explicit formula for the Blaschke curvature of a 3-web: (we note  $\partial_i := (\partial_y U_i)\partial_x - (\partial_x U_i)\partial_y$ ,  $1 \leq i \leq 3$ )

**Theorem 0.3.** *The Blaschke curvature of  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(U_1, U_2, U_3)$  is given by the formula*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{W}} = (\partial_3 A) dx \wedge dy \quad \text{where } A = \frac{\partial_1(U_2)}{\partial_1(U_3)\partial_2(U_3)} \times \partial_2 \left[ \frac{\partial_1(U_3)}{\partial_1(U_2)} \right].$$

Then  $\mathcal{W}(U_1, U_2, U_3)$  is of maximal rank if and only if  $\partial_3 A = 0$ .

The real interest of this result consists in the simplicity of its formulation (compare with [9,11]).

We can get results about the characterization of 4-webs of the type  $\mathcal{W}(x, y, x+y, U)$  (see Théorème 2.4). But our most interesting results are for 5-webs of the form  $\mathcal{W}_{a,U} = \mathcal{W}(x, y, x+y, y+ax, U(x, y))$  where  $U(x, y) \in \mathcal{O}^2$  and  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Using the precedent results and the notations of Théorème 2.5, we have

**Theorem 0.4.** *The web  $\mathcal{W}_{a,U}$  is of maximal rank 6 if and only if  $U$  satisfies  $\partial_U[\Omega_i/\Delta] = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ).*

If we take  $a = -1$  and  $U(x, y) = A(x) + B(y)$ , then the differential equations of Theorem 0.4 simplify, and one can find some solutions. This gives new exceptional 5-webs:

**Theorem 0.5.** *The following webs are pairwise non-equivalent exceptional 5-webs:*

- $\mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, x^2 + y^2)$
- $\mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, e^x + e^y)$
- $\mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, xy)$ .

Although the list given by the latter theorem is not exhaustive, it already gives an answer to Chern's problem stated above. However, if the determination of all maximal rank 5-webs which admit a parallelisable 4-subweb is a work in progress, the entire classification of exceptional 5-webs is still largely open. Again according to Chern [6], this classification is a fundamental problem in web geometry.

## 1. Introduction et notations

Dans cette Note  $d$  désignera un entier plus grand que 3. On se place dans un cadre analytique complexe avec un point de vue localisé en l'origine de  $\mathbb{C}^k$  ( $k = 1, 2$ ). On notera  $\mathcal{O}^k$  (resp.  $\mathcal{M}^k$ ) l'espace des germes  $U$  de fonctions holomorphes (resp. méromorphes) en l'origine de  $\mathbb{C}^k$ . Un  $d$ -tissu (ordonné) sera la donnée d'un  $d$ -uplet de germes de feuilletage régulier  $\mathcal{W}_d = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d)$  deux à deux en position générale en l'origine. Pour une introduction à la théorie des tissus, on renvoie aux livres [3] (en allemand), [2,16], ainsi qu'aux articles [7] ou [8].

Soit  $\mathcal{W}_d$  un  $d$ -tissu défini par  $d$  germes de feuilletages  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d$ . Le théorème d'inversion locale implique qu'on peut trouver  $d$  (germes de) fonctions holomorphes  $U_1, \dots, U_d$  telles que les lignes de niveau de  $U_i$  définissent le germe  $\mathcal{F}_i$ . On notera alors  $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(U_1, \dots, U_d)$ . Deux  $d$ -tissus  $\mathcal{W}_d$  et  $W_d$  sont dit équivalents s'il existe un germe de difféomorphisme  $\Phi$  tel que  $\Phi_*\mathcal{W}_d = W_d$ . On cherche à classifier les tissus, modulo cette relation d'équivalence.

A tout tissu  $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(U_1, \dots, U_d)$  on associe l'espace  $\mathcal{A}[\mathcal{W}_d] = \{(F_1, \dots, F_d) \in (\mathcal{O}^1/\mathbb{C})^d \mid \sum F_i(U_i) = 0\}$  dont les éléments seront appelés « relations abéliennes » de  $\mathcal{W}_d$ . Un résultat fondamental de Bol [4], nous donne la borne  $\text{rg } \mathcal{W}_d \leq (d-1)(d-2)/2$  pour le rang  $\text{rg } \mathcal{W}_d := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}[\mathcal{W}_d]$  de  $\mathcal{W}_d$ . Cet entier est un invariant : deux tissus équivalents ont même rang.

Si  $\mathcal{C}$  est une courbe algébrique plane réduite de degré  $d$ , on peut lui associer un  $d$ -tissu linéaire  $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$  globalement défini sur l'espace projectif dual  $(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)^*$  (voir [3]), et donc une famille à deux paramètres de germes de tissus. D'après le théorème d'Abel, les sommes abéliennes associées aux différentielles de première espèce attachées à la courbe  $\mathcal{C}$  s'annulent. Cela nous donne un isomorphisme entre  $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}^1)$  et l'espace des relations abéliennes du « tissu algébrique »  $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$  (voir [8]). On en déduit que  $\text{rg } \mathcal{W}_{\mathcal{C}} = (d-1)(d-2)/2$ , et ainsi les tissus algébriques sont de « rang maximal ».

On montre assez facilement qu'inversement, les 3-tissus de rang maximal sont (équivalents à des tissus) algébriques. Énoncé dans le cadre des surfaces de double translation, un résultat de Lie [10] s'interprète en géométrie des tissus comme le fait que les 4-tissus de rang maximal 3 sont algébriques également.

Par contre, on sait depuis 1936 qu'il existe des 5-tissus « exceptionnels » i.e. de rang maximal 6 mais non-algébriques : dans [5], Bol donne l'exemple d'un tel tissu. Il s'agit du tissu  $\mathcal{B} = \mathcal{W}(x, y, x/y, (1-y)/(1-x), (x/y)(1-y)/(1-x))$  associé à l'équation d'Abel du dilogarithme. Ce n'est que très récemment, en 2001, que Robert [15] et l'auteur [12,13], indépendamment, ont montré qu'il existait d'autres  $d$ -tissus plans exceptionnels pour  $d = 6, 7, 8, 9$ , encore liés à des fonctions polylogarithmiques. La détermination des 5-tissus exceptionnels est un des problèmes importants de la théorie, comme le dit Chern :

“[For planar webs], an important unsolved problem is whether there are other 5-webs of rank 6, besides the algebraic ones and Bol's example.” ([6], page 27).

Dans la partie qui suit, on explique comment trouver des équations différentielles que doit vérifier  $U$ , pour que le 5-tissu  $\mathcal{W}_{a,U} = \mathcal{W}(x, y, x + y, x + ay, U)$  soit de rang 6. En considérant différentes solutions de ces équations

(pour  $a = -1$ ), on obtient plusieurs 5-tissus exceptionnels simples et non équivalents à  $\mathcal{B}$ , apportant ainsi une réponse au problème de Chern.

Pour  $U(x, y) \in \mathcal{O}^2$  et  $z = x$  ou  $y$ , on notera indifféremment  $\partial_z U$  ou  $U_z$  la dérivée partielle de  $U$  par rapport à  $z$ . On considérera aussi le germe de champ de vecteurs  $\partial U := U_y \partial_x - U_x \partial_y$ . Finalement, on désignera la projection linéaire  $(F_1, \dots, F_d) \in \mathcal{A}[\mathcal{W}_d] \rightarrow F_d \in \mathcal{O}^1/\mathbb{C}$  par  $\pi_d$ .

## 2. Application de la méthode d'Abel à la caractérisation des tissus plans de rang maximal

La première publication d'Abel [1] consiste en la description d'une « méthode générale » pour résoudre les équations fonctionnelles en deux variables, quand les inconnues ne dépendent que d'une variable. L'idée est de dériver par rapport aux différentes variables afin de construire, à partir de l'équation fonctionnelle, des équations différentielles que doivent vérifier les différentes inconnues. L'espace des relations abéliennes d'un tissu s'interprète naturellement comme l'espace des solutions d'une équation fonctionnelle associée au tissu. L'application de la méthode d'Abel permet d'étudier de façon pratique les relations abéliennes et donc le rang des tissus plans.

**Théorème 2.1.** *Soit  $U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$  un  $d$ -uplet d'éléments de  $\mathcal{O}^2$  définissant un germe de tissu  $\mathcal{W}$  en l'origine. Alors on peut construire un germe d'opérateur différentiel  $\mathbf{P}_{\mathcal{W}}$  à coefficients méromorphes, tel que  $\pi_d(\mathcal{A}[\mathcal{W}]) \subset \text{Sol}(\mathbf{P}_{\mathcal{W}})$  dans un voisinage de tout point générique suffisamment proche de l'origine. Les coefficients de  $\mathbf{P}_{\mathcal{W}}$  sont des expressions rationnelles en les  $U_i$  et leurs dérivées partielles.*

Dans la partie 2.2.2 de [13], on montre comment la méthode d'Abel permet d'établir ce théorème, dans le cas où les fonctions  $U_i$  sont rationnelles. La démonstration dans notre cas plus général est identique.

De l'égalité  $\text{rg}[\mathcal{W}(U_1, \dots, U_d)] = \text{rg}[\mathcal{W}(U_1, \dots, U_{d-1})] + \dim \pi_d(\mathcal{A}[\mathcal{W}])$ , il vient ensuite le corollaire

**Corollaire 2.2.** *Une condition nécessaire pour que  $\mathcal{W}(U_1, \dots, U_d)$  soit de rang maximal est que*

$$\text{Ord}[\mathbf{P}_{\mathcal{W}}] - 1 \geq \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \text{rg}[\mathcal{W}(U_1, \dots, U_{d-1})]$$

où  $\text{Ord}[\mathbf{P}_{\mathcal{W}}]$  désigne le degré de  $\mathbf{P}_{\mathcal{W}} \in \mathcal{M}^1[\partial_z]$ .

Une étude facile de la façon dont est construit l'opérateur  $\mathbf{P}_{\mathcal{W}}$  du Théorème 2.1 montre que la condition nécessaire donnée par ce corollaire correspond à l'annulation d'un nombre fini d'expressions différentielles non-linéaires en les  $U_i$ . Ainsi, si l'on connaît  $r_g(d-1) := \text{rg}[\mathcal{W}(U_1, \dots, U_{d-1})]$  on peut trouver, du moins théoriquement,  $\frac{1}{2}(d-1)(d-2) - r_g(d-1)$  équations différentielles non-linéaires que doit vérifier  $U_d$  pour que  $\mathcal{W}(U_1, \dots, U_d)$  soit de rang maximal. Dans la suite de la Section 2, on applique cette approche pour caractériser certains  $d$ -tissus de rang maximal, pour  $d = 3, 4, 5$  : sous l'hypothèse de l'existence d'un sous-tissu parallélisable, on obtient des conditions non seulement nécessaires, mais également suffisantes.

### 2.1. Une caractérisation des 3-tissus de rang maximal

On donne ici une condition nécessaire et suffisante pour qu'un germe de 3-tissu  $\mathcal{W}(U_1, U_2, U_3)$  soit de rang 1. Dans le résultat suivant, on note  $\partial_i = \partial_{U_i}$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

**Théorème 2.3.** *On a la formule suivante pour la courbure de Blaschke du 3-tissu  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(U_1, U_2, U_3)$  :*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{W}} = \partial_3(A) \, dx \wedge dy \quad \text{avec} \quad A = \frac{\partial_1(U_2)}{\partial_1(U_3)\partial_2(U_3)} \times \partial_2 \left[ \frac{\partial_1(U_3)}{\partial_1(U_2)} \right] \in \mathcal{O}^2.$$

Donc  $\mathcal{W}(U_1, U_2, U_3)$  est de rang maximal 1 si et seulement si  $\partial_3(A) = 0$ .

D'autres formules pour la courbure de Blaschke étaient déjà connues (voir [9,11], par exemple). Bien que cette nouvelle expression ne soit pas symétrique en les  $U_i$ , son intérêt réside dans sa simplicité.

## 2.2. Une caractérisation de certains 4-tissus de rang maximal

Considérons maintenant un 4-tissu qui admet un sous-3-tissu hexagonal (pour un 4-tissu donné, ce fait est aisément vérifiable en utilisant le Théorème 2.3). Alors ce tissu est équivalent à un tissu de la forme  $\mathcal{W}(x, y, x + y, U(x, y))$  avec  $U \in \mathcal{O}^2$ . Pour les tissus de ce type, on a :

**Théorème 2.4.** *Le 4-tissu  $\mathcal{W}(x, y, x + y, U)$  est de rang maximal 3 si et seulement si la fonction  $U$  vérifie*

$$\partial_U \left[ \frac{U_{yxx} - U_{xyy}}{U_x U_y (U_x - U_y)} \right] = 0 \quad \text{et} \quad \partial_U \left[ \frac{U_{xx} U_y - U_{yy} U_x + 2U_{xy} (U_x - U_y)}{U_x U_y (U_x - U_y)} \right] = 0.$$

Du fait bien connu que les 4-tissus de rang 3 sont tous algébriques (voir [10,14]), il découle facilement qu'un 4-tissu satisfaisant l'hypothèse du théorème est équivalent à un 4-tissu formé de 4 pincesaux de droites dont au moins trois des sommets sont alignés. Notre résultat reste cependant intéressant, d'un point de vue pratique.

## 2.3. Une caractérisation de certains 5-tissus de rang maximal

Considérons un germe de 5-tissu plan, admettant un sous-4-tissu parallélisable. Alors ce tissu est équivalent à un tissu de la forme  $\mathcal{W}_{a,U} := \mathcal{W}(x, y, x + y, x + ay, U)$  où  $a \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$  et  $U$  est un élément de  $\mathcal{O}^2$  tel que le discriminant  $\Delta$  défini ci-dessous ne s'annule pas en l'origine.

Par la méthode décrite ci-dessus, on obtient le résultat suivant :

**Théorème 2.5.** *Le 5-tissu  $\mathcal{W}_{a,U}$  est de rang maximal 6 si et seulement si la fonction  $U$  vérifie les équations différentielles  $\partial_U [\Omega_i / \Delta] = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), où*

$$\begin{aligned} \Delta &= U_x U_y (U_x - U_y) (U_x - a U_y), & \Omega_1 &= (\partial_x - a \partial_y)[A], \\ \Omega_2 &= (U_x - a U_y) \times A + (\partial_x - \partial_y)[B], & \Omega_3 &= (U_x - a U_y) \times B + (\partial_x - \partial_y)[C] \end{aligned}$$

avec  $A = (\partial_x - \partial_y) \partial_{xy}^2 [U]$ ,  $B = (U_x - U_y) U_{xy} + (\partial_x - \partial_y) [U_x U_y]$  et  $C = U_x U_y (U_x - U_y)$ .

Il ne semble pas possible de résoudre directement le système différentiel précédent dans toute sa généralité. On peut cependant chercher des solutions en demandant à  $U$  d'être d'une forme simple. Imposer que  $U$  s'écrive  $U(x, y) = A(x) + B(y)$  est particulièrement intéressant, puisque cela implique immédiatement que  $\text{rg } \mathcal{W}_{a,U} \geq 4$ , tout en simplifiant considérablement les équations  $\partial_U [\Omega_i / \Delta] = 0$ . Sous cette hypothèse, en utilisant un « solver » d'équations différentielles, on peut établir l'existence de nouveaux 5-tissus exceptionnels :

**Théorème 2.6.** *Les tissus suivants sont exceptionnels et non équivalents entre eux ainsi qu'avec  $\mathcal{B}$  :*

- $\mathcal{E}_1 = \mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, x^2 + y^2)$
- $\mathcal{E}_2 = \mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, xy)$
- $\mathcal{E}_3 = \mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, e^x + e^y)$ .

**Preuve abrégée.** On vérifie que les fonctions  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2, xy, e^x + e^y$  satisfont bien les équations du Théorème 2.5. On en déduit que les quatre tissus  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_3$  sont bien de rang maximal. Aucun d'eux n'est équivalent à  $\mathcal{B}$ , puisque ce dernier n'admet pas de sous-4-tissu parallélisable. D'autre part, en utilisant la méthode d'Abel, on construit les relations abéliennes pour chacun des tissus, vérifiant ainsi qu'ils sont de rang 6 (voir ci-dessous). Cela nous permet de connaître le rang de leurs sous-tissus. Des arguments simples de dénombrement du

nombre de sous- $k$ -tissus de rang donné montrent que les tissus du Théorème 2.6 sont deux à deux non-équivalents. D'autre part, un tissu algébrique qui admet un sous-4-tissu parallélisable est forcément hexagonal. Or, par exemple en utilisant l'expression pour la courbure de Blaschke du Théorème 2.3, on vérifie facilement qu'aucun des tissus du Théorème 2.6 ne l'est. Ces tissus de rang maximal ne sont pas algébriques : ils sont donc exceptionnels.

On donne ci-dessous « les » relations abéliennes de  $\mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, x^2 + y^2)$  :

$$\begin{array}{ll} \text{(1)} & (x) + (y) - (x + y) = 0 \\ \text{(2)} & (x) - (y) - (x - y) = 0 \\ \text{(3)} & (x)^2 + (y)^2 - (x^2 + y^2) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(4)} & 2(x)^2 + 2(y)^2 - (x + y)^2 - (x - y)^2 = 0 \\ \text{(5)} & 4(x)^4 + 4(y)^4 + (x + y)^4 + (x - y)^4 - 6(x^2 + y^2)^2 = 0 \\ \text{(6)} & 8(x)^6 + 8(y)^6 + (x + y)^6 + (x - y)^6 - 10(x^2 + y^2)^3 = 0. \end{array}$$

Les relations (1), (2) et (3) sont également des relations abéliennes pour les autres tissus  $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_3$ . On donne ci-dessous neuf autres relations abéliennes notées (4<sub>*i*</sub>), (5<sub>*i*</sub>) et (6<sub>*i*</sub>) ( $i = 2, 3$ ) telles que la famille {(1), (2), (3), (4<sub>*i*</sub>), (5<sub>*i*</sub>), (6<sub>*i*</sub>)} forme une base de  $\mathcal{A}[\mathcal{E}_i]$  pour  $i = 2, 3$  :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } \mathcal{E}_2 : & \text{(4}_2\text{)} \quad \log(x) + \log(y) - \log(xy) = 0 \quad \text{(5}_2\text{)} \quad (x + y)^2 - (x - y)^2 - 4(xy) = 0 \\ & \text{(6}_2\text{)} \quad 2(x)^4 + 2(y)^4 - (x + y)^4 - (x - y)^4 + 12(xy)^2 = 0 \\ \text{pour } \mathcal{E}_3 : & \text{(4}_3\text{)} \quad e^x + e^y - (e^x + e^y) = 0 \quad \text{(5}_3\text{)} \quad (y) + \log(1 + e^{(x-y)}) - \log(e^x + e^y) = 0 \\ & \text{(6}_3\text{)} \quad e^{2x} + e^{2y} + 2e^{(x+y)} - (e^x + e^y)^2 = 0. \quad \square \end{array}$$

Si la classification des tissus de rang maximal admettant un sous 4-tissu parallélisable fait l'objet d'un travail en cours, le problème de la détermination des 5-tissus exceptionnels les plus généraux est encore largement ouvert.

## Références

- [1] N.H. Abel, Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables, in : Œuvres complètes de N.H. Abel, t. 1, Grondhal Son, Christiania, 1881, pp. 1–10.
- [2] M. Akivis, V. Goldberg, Differential geometry of webs, in: Handbook of Differential Geometry, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [3] W. Blaschke, G. Bol, Geometrie der Gewebe, in: Grundlehren Math., vol. 49, Springer, Berlin, 1938.
- [4] G. Bol, On  $n$ -webs of curves in a plane, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932) 855–857.
- [5] G. Bol, Über ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene, Abh. Math. Semin. Hamb. Univ. 11 (1936) 387–393.
- [6] S.S. Chern, Wilhelm Blaschke and Web Geometry, in: Wilhelm Blaschke Gesammelte Werke, vol. 5, Thales, Essen, 1985, pp. 21–23.
- [7] S.S. Chern, Web geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982) 1–8.
- [8] S.S. Chern, P.A. Griffiths, Abel's theorem and webs, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 80 (1978) 13–110.
- [9] A. Hénaut, Sur la courbure de Blaschke et le rang des tissus de  $\mathbb{C}^2$ , Natural Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 51 (1) (2000) 11–25.
- [10] S. Lie, Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden, Arch. für Math. 7 (2) (1882) 450–467.
- [11] G. Mignard, Rang et courbure des 3-tissus de  $\mathbb{C}^2$ , C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 329 (1999) 629–632.
- [12] L. Pirio, Study of a functional equation associated to the Kummer's equation of the trilogarithm. Applications, Preprint, arXiv:math.CV/0206172, 2002.
- [13] L. Pirio, Abelian functional equations, planar web geometry and polylogarithms, Selecta Math. (NS), à paraître.
- [14] H. Poincaré, Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes, Bull. Soc. Math. France 29 (1901) 61–86.
- [15] G. Robert, Relations fonctionnelles polylogarithmiques et tissus plans, Prépublication n° 146 (2002), Université Bordeaux 1.
- [16] J. Grifone, J. Salem (Eds.), Web Theory and Related Topics, World Scientific, 2001.