Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 5–10
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Combinatoire

Automaticité des ordinaux et des graphes homogènes

Christian Delhommé

ERMIT, département de mathématiques, université de La Réunion, 15, avenue René Cassin, BP 7151, 97715 Saint-Denis Messag cedex 9, La Réunion, France

Reçu le 19 juin 2003 ; accepté après révision le 30 mars 2004

Disponible sur Internet le 25 mai 2004

Présenté par Yves Meyer

Résumé

Les structures automatiques (resp. arbre-automatiques) sont les structures relationnelles dont le domaine est un ensemble régulier de mots (resp. de termes) finis et dont chaque relation atomique est reconnaissable par un automate multi-bandes synchrones. Nous établissons des critères d'automaticité et énonçons des critères analogues d'arbre-automaticité, dont il découle en particulier, d'une part que *le graphe aléatoire n'est pas automatique, ni même arbre-automatique*, et d'autre part, que *tout ordre bien fondé automatique est de hauteur strictement inférieure à* ω^ω, et que ω^{ω^ω} *est l'ensemble des ordinaux arbre-automatiques*. ***Pour citer cet article : C. Delhommé, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Automaticity of ordinals and of homogeneous graphs. We establish criteria of automaticity and we state analogous criteria of tree-automaticity which show, on the one-hand that *the random graph is neither automatic nor tree-automatic*, and on the other hand that *every well-founded automatic poset has height less than* ω^ω and that ω^{ω^ω} *is the set of tree-automatic ordinals*. ***To cite this article: C. Delhommé, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abridged English version

Automatic structures and tree-automatic structures are relational structures with domain a regular set of finite words (resp. terms) and each of whose atomic relations is recognized by a synchronous multi-tape automaton. Each such structure has a decidable first-order theory; indeed *to each first order formula is effectively associated an automaton recognizing the corresponding relation* (see [12,13,11,14,3], and [6,5,2]).

In circulated notes, we proved that *the random graph, as well as the generic poset or the generic* $\mathfrak{K}_n$*-free graph, fail to be automatic* [7], and then that *the ordinal* ω^ω *also fails* [8] (thus, settling a question from [14], ω^ω *is* indeed *precisely the set of automatic ordinals*). The proof given in [8], which is reproduced as Section 5 of [9], can easily be adapted to bound the heights of automatic well-founded partially ordered-sets (see Corollary 2.2), and, as observed by the authors of [15], to bound the Cantor–Bendixon ranks of automatic totally ordered-sets.

In this Note, we formulate the proofs of [7] and [8], which share common features, as general criteria of automaticity and we state analogous criteria for tree-automaticity (Proposition 1.1, and Proposition 1.2 together with Corollary 1.3). It follows, in particular, that *the random graph, as well as the generic poset or the generic*

Adresse e-mail : delhomme@univ-reunion.fr (C. Delhommé).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.03.035

$\mathfrak{K}_n$-free graph, also fail to be tree-automatic (Corollary 2.1), and that ω^{ω^ω} *is precisely the set of tree-automatic ordinals* (Corollary 2.2).

Let us state those criteria. In the sequel $\mathfrak{A}$ is a relational structure, with domain denoted by $|\mathfrak{A}|$, over a finite relational language τ. We refer to a *first-order formula over τ* as a *τ-formula*.

Relative growth

Consider a *finite* set $\Phi(x)$ of τ-formulas with free variables among which x is distinguished, and a set $\mathcal{F}$ of finite subsets of $|\mathfrak{A}|$ with elements of every finite cardinality.

Given a finite subset E of $|\mathfrak{A}|$, say that two elements a and a' of $|\mathfrak{A}|$ are *Φ-equivalent over E* (written $a \sim_E^\Phi a'$) when for each formula $\varphi(x, y_1, \ldots, y_p)$ (with all free-variables displayed) from Φ and every $\vec{b} \in E^p$, $\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{b})$ if and only if $\mathfrak{A} \models \varphi(a', \vec{b})$. Say that a subset of $|\mathfrak{A}|$ is *Φ-free over E* (for short that it is *E-Φ-free*) when its elements are pairwise non-Φ-equivalent over E. Let $\vartheta_\mathcal{F}^\Phi(E) := \min\{\max\{\operatorname{card} F\colon F \in \mathcal{F}, F \subseteq G\}\colon G$ is E-Φ-free and of maximal size$\} \in \mathbb{N}$.

Now, for each integer n let $\vartheta_\mathcal{F}^\Phi(n) := \min\{\vartheta_\mathcal{F}^\Phi(E)\colon E \in \mathcal{F}, \operatorname{card} E = n\}$. Then Proposition 1.1 asserts: *If the structure $\mathfrak{A}$ is automatic, then* $\liminf_{n\to\infty} \frac{\vartheta_\mathcal{F}^\Phi(n)}{n} < \infty$; *if it is tree-automatic, then* $\liminf_{n\to\infty} \frac{\log \vartheta_\mathcal{F}^\Phi(n)}{\log n} < \infty$.

When $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{R})$ is the random graph, consider $\Phi(x)$ reduced to the single atomic formula $\mathcal{R}(x, y)$ and $\mathcal{F}$ the set of all finite subsets of A, in which case $\vartheta_\mathcal{F}^\Phi(E)$ is simply $\max\{\operatorname{card} F\colon F \in \mathcal{F}, F$ is E-Φ-free$\}$: then $\vartheta_\mathcal{F}^\Phi(n) = 2^n$.

Indecomposability

Given a τ-structure $\mathfrak{B}$ and a set $\mathcal{T}$ of τ-structures, say that $\mathfrak{B}$ is a *sum-augmentation* of $\mathcal{T}$ when its domain admits a finite partition on each class B of which the induced substructure $\mathfrak{B} \restriction B$ is isomorphic to an element of $\mathcal{T}$. Say that $\mathfrak{B}$ is a *box-augmentation* of $\mathcal{T}$ when there are a *non-empty* finite family $(\mathfrak{B}_i\colon i \in I)$ of $\mathcal{T}$ and a bijection $f : \prod_{i\in I} |\mathfrak{B}_i| \to |\mathfrak{B}|$ such that for each $i \in I$ and every $\mathbf{b} \in \prod_{j\in I\setminus\{i\}} |\mathfrak{B}_i|$, the function $b \mapsto f(b \frown \mathbf{b})$ is an embedding of $\mathfrak{B}_i$ into $\mathfrak{B}$, where $b \frown \mathbf{b}$ denotes the tuple extending $\mathbf{b}$ with value b at i.

Given a τ-formula $\varphi(x, y_1, \ldots, y_p)$ with all free-variables displayed, for each tuple $\vec{b} \in |\mathfrak{A}|^p$, let $\varphi(|\mathfrak{A}|, \vec{b}) := \{a \in |\mathfrak{A}|\colon \mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{b})\}$ denote the subset of $|\mathfrak{A}|$ defined by φ with the parameter $\vec{b}$. Proposition 1.2 asserts: *If $\mathfrak{A}$ is automatic* (*resp. tree-automatic*)*, then for every τ-formula $\varphi(x, \vec{y})$, there is a finite set $\mathcal{S}_\varphi^\mathfrak{A}$ of τ-structures with the property that for every $\vec{b} \in |\mathfrak{A}|^p$, the induced substructure $\mathfrak{A} \restriction \varphi(|\mathfrak{A}|, \vec{b})$ is a sum-augmentation of $\mathcal{S}_\varphi^\mathfrak{A}$* (*resp. is a sum-augmentation of a set of box-augmentations of $\mathcal{S}_\varphi^\mathfrak{A}$*).

Now, given a function ν defined on some class $\mathcal{S}$ of τ-structures, say that an element α of the range of ν is *sum-indecomposable* (resp. *box-indecomposable*) when given any $\mathfrak{B} \in \mathcal{S}$ and any set $\mathcal{T}$ of which $\mathfrak{B}$ is a sum-augmentation (resp. a box-augmentation), if ν takes value α at $\mathfrak{B}$, then it also takes it at some element of $\mathcal{T}$. Corollary 1.3 asserts: *If $\mathfrak{A}$ is automatic* (*resp. tree-automatic*)*, then for every τ-formula $\varphi(x, \vec{y})$, ν assumes only finitely many sum-indecomposable values* (*resp. only finitely many simultaneously sum-indecomposable and box-indecomposable values*) *on the $\mathfrak{A} \restriction \varphi(|\mathfrak{A}|, \vec{b})$'s belonging to $\mathcal{S}$.*

When ν is the function *height* defined on the class of well-founded posets, the sum-indecomposable ordinals are the powers of ω. Thus *the well-founded part of every automatic poset has height less than ω^ω*: consider $\Phi(x)$ reduced to the single atomic formula $y < x$.

1. Présentation des résultats

Dans ce qui suit, $\mathfrak{A}$ désigne une structure, de domaine $|\mathfrak{A}|$, sur un langage relationnel fini τ. Par *τ-formule*, on entendra *formule du premier ordre sur τ*. Chaque fois qu'en désignant une telle formule on fera apparaître des variables libres, on les fera toutes apparaître.

1.1. Croissance relative

Considérons un ensemble fini $\Phi(x)$ de τ-formules où la variable libre x est distinguée, et un ensemble $\mathcal{F}$ de parties finies de $|\mathfrak{A}|$ admettant des éléments de tout cardinal fini.

Étant donnée une partie finie E de $|\mathfrak{A}|$, disons que deux éléments a et a' de $|\mathfrak{A}|$ sont *Φ-équivalents sur E* (auquel cas on écrira $a \sim_E^\Phi a'$) quand pour chaque formule $\varphi(x, y_1, \ldots, y_p)$ de Φ et tout uplet $\vec{b} \in E^p$, $\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{b})$ si et seulement si $\mathfrak{A} \models \varphi(a', \vec{b})$. Disons alors qu'une partie de $|\mathfrak{A}|$ est *Φ-libre sur E* (ou *E-Φ-libre*) lorsque ses éléments sont deux à deux non Φ-équivalents sur E. Soit alors

$$\vartheta_{\mathcal{F}}^{\Phi}(E) := \min\bigl\{\max\{\operatorname{card} F\colon\ F \in \mathcal{F}, F \subseteq G\}\colon\ G\ E\text{-}\Phi\text{-libre de taille maximum}\bigr\} \in \mathbb{N}, \quad \text{puis}$$
$$\vartheta_{\mathcal{F}}^{\Phi}(n) := \min\bigl\{\vartheta_{\mathcal{F}}^{\Phi}(E)\colon\ E \in \mathcal{F},\ \operatorname{card} E = n\bigr\} \in \mathbb{N}.$$

Proposition 1.1. *Si la structure $\mathfrak{A}$ est automatique, alors* $\liminf_{n\to\infty} \frac{\vartheta_{\mathcal{F}}^{\Phi}(n)}{n} < \infty$; *si elle est arbre-automatique, alors* $\liminf_{n\to\infty} \frac{\log \vartheta_{\mathcal{F}}^{\Phi}(n)}{\log n} < \infty$.

1.2. Indécomposabilité

Étant donnée une τ-structure $\mathfrak{B}$ et un ensemble $\mathcal{T}$ de τ-structures, disons que $\mathfrak{B}$ est *somme-augmentation* de $\mathcal{T}$ lorsque son domaine admet une partition finie $(B_i\colon\ i \in I)$ telle que chaque sous-structure (induite) $\mathfrak{B} \restriction B_i$ soit isomorphe à un élément de $\mathcal{T}$, en d'autres termes, lorsqu'il existe une famille finie *non-vide* $(\mathfrak{B}_i\colon\ i \in I)$ de $\mathcal{T}$ et une bijection $f : \coprod_{i\in I} |\mathfrak{B}_i| \to |\mathfrak{B}|$ telle que pour chaque $i \in I$, la restriction $f \restriction |\mathfrak{B}_i|$ soit un plongement de $\mathfrak{B}_i$ dans $\mathfrak{B}$; disons que $\mathfrak{B}$ est *boîte-augmentation* de $\mathcal{T}$ lorsqu'il existe une famille finie *non-vide* $(\mathfrak{B}_i\colon\ i \in I)$ de $\mathcal{T}$ et une bijection $f : \prod_{i\in I} |\mathfrak{B}_i| \to |\mathfrak{B}|$ telle que pour chaque $i \in I$ et tout $\mathbf{b} \in \prod_{j\in I\setminus\{i\}} |\mathfrak{B}_i|$, la fonction $b \mapsto f(b \frown \mathbf{b})$ soit un plongement de $\mathfrak{B}_i$ dans $\mathfrak{B}$, où $b \frown \mathbf{b}$ désigne l'uplet qui étend $\mathbf{b}$ par la valeur b en i.

Pour chaque τ-formule $\varphi(x, y_1, \ldots, y_p)$, chaque paramètre $\vec{b} \in |\mathfrak{A}|^p$ et chaque partie A de $|\mathfrak{A}|$, $\varphi(A, \vec{b})$ désigne la partie $\{a \in A\colon\ \mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{b})\}$ de A.

Proposition 1.2. *Si la structure $\mathfrak{A}$ est automatique* (*resp. si elle est arbre-automatique*), *alors pour toute τ-formule $\varphi(x, \vec{y})$, il existe un ensemble fini $\mathcal{S}_\varphi^{\mathfrak{A}}$ de τ-structures tel que pour tout $\vec{b} \in |\mathfrak{A}|^p$, la structure induite $\mathfrak{A} \restriction \varphi(|\mathfrak{A}|, \vec{b})$ soit somme-augmentation de $\mathcal{S}_\varphi^{\mathfrak{A}}$* (*resp. soit somme-augmentation d'un ensemble de boîte-augmentations de $\mathcal{S}_\varphi^{\mathfrak{A}}$*).

Considérons une fonction ν de domaine une classe $\mathcal{S}$ de τ-structures. Disons qu'un élément α de l'image de ν est *somme-indécomposable* (resp. *boîte-indécomposable*), si pour chaque $\mathfrak{B} \in \mathcal{S}$ tel que $\nu(\mathfrak{B}) = \alpha$, tout ensemble dont $\mathfrak{B}$ soit somme-augmentation (resp. boîte-augmentation) contient un élément de $\mathcal{S}$ d'image α par ν.

Corollaire 1.3. *Si la structure $\mathfrak{A}$ est automatique* (*resp. arbre-automatique*), *alors pour chaque τ-formule $\varphi(x, \vec{y})$, ν ne prend qu'un nombre fini de valeurs somme-indécomposables* (*resp. ne prend qu'un nombre fini de valeurs à la fois somme-indécomposables et boîte-indécomposables*) *sur les divers $\mathfrak{A} \restriction \varphi(|\mathfrak{A}|, \vec{b})$ appartenant à $\mathcal{S}$.*

Dans la section qui suit, nous présentons les résultats en vue desquels les critères ci-dessus ont été établis. Le reste du texte est consacré à la démonstration desdits critères, dans le cas automatique.

2. Applications

2.1. Relations binaires homogènes

(Voir [10].) Une structure relationnelle est dite *homogène* si tout isomorphisme entre deux de ses restrictions finies admet une extension en un automorphisme de la structure. Étant donnée une classe de relations binaires, appelons *générique* toute relation dénombrable homogène dont les types d'isomorphie des restrictions finies sont ceux des éléments finis de la classe ; une telle structure, lorsqu'elle existe, est unique. Ainsi le *graphe aléatoire* est le graphe générique, et pour chaque entier $n \geqslant 3$, il existe un graphe générique relativement à la classe des graphes sans sous-graphe complet de taille n (appelons le *graphe-sans-$\mathfrak{K}_n$ générique*).

Corollaire 2.1. *Le graphe générique $\mathfrak{G}$, l'ensemble ordonné générique $\mathfrak{P}$ et le graphe-sans-$\mathfrak{K}_n$ générique $\mathfrak{H}_n$ ne sont ni automatiques [7], ni même arbre-automatiques.*

Preuve. Considérons, étant donné un symbole de relation binaire $\prec$, l'ensemble de formules $\Phi(x) = \{x \prec y, y \prec x, x = y\}$, et la classe $\mathcal{F}$ de tous les ensembles finis de sommets de $\mathfrak{G}$, ou de toutes les antichaînes (c'est-à-dire ensembles de sommets deux à deux incomparables) finies de $\mathfrak{P}$, ou de tous les indépendants (c'est-à-dire ensembles de sommets deux à deux non adjacents) finis de $\mathfrak{H}_n$. Dans tous les cas $\vartheta^{\Phi}_{\mathcal{F}}$ croît au moins exponentiellement. □

2.2. Bons-ordres

Corollaire 2.2. *Tout bon ordre automatique est de type strictement inférieur à ω^{ω} [8], et plus généralement, la partie bien-fondée de tout ordre automatique est de hauteur strictement inférieure à ω^{ω}. Tout bon-ordre arbre-automatique est de type strictement inférieur à $\omega^{\omega^{\omega}}$.*

Preuve. Considérer la fonction *hauteur* (à valeurs ordinales) sur la classe des ensembles ordonnés bien-fondés. L'argument donné dans [1] quant au fait que les puissances de ω (les ω^{ξ}) sont les types somme-indécomposables des bons ordres prouve également qu'ils sont les hauteurs somme-indécomposables des ordres bien fondés. Quant aux types boîte-indécomposables des bons ordres, il s'agit des $\omega^{\omega^{\xi}}$ (cf. [4]). D'autre part, pour chaque ordre $\mathfrak{A}$, tout ordinal inférieur à la valeur prise par ν sur un $\mathfrak{A} \restriction (|\mathfrak{A}| < b)$ bien fondé est également une valeur prise par ν sur un tel type de restriction. □

On constate aisément que tout ordinal strictement inférieur à $\omega^{\omega^{\omega}}$ est arbre-automatique ; en outre, puisque tout segment initial d'un bon ordre y est définissable par une formule du premier ordre avec un paramètre, la classe des ordinaux arbre-automatiques est un segment initial (cf. Section 3.2) ; ainsi, $\omega^{\omega^{\omega}}$ est précisément l'ensemble des ordinaux arbre-automatiques.

3. Préliminaires

Considérons un ensemble fini non vide Σ ; soit $\Sigma^{<\omega}$ l'ensemble des *mots* sur Σ, c'est-à-dire des suites finies d'éléments de Σ ; la *longueur* d'une telle suite $\mathbf{u}$ sera notée $|\mathbf{u}|$, de sorte que $\mathbf{u} = (\mathbf{u}(k)\colon 0 \leqslant k < |\mathbf{u}|)$; le mot vide, seul mot de longueur nulle, sera noté ϵ. Le mot concaténé de deux mots $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

3.1. Automates

Considérons un *automate* $\mathcal{A} = \langle \Sigma, \mathcal{Q}, \Delta, I, F\rangle$ sur l'alphabet Σ, dont $\mathcal{Q}$ est l'ensemble (fini) des états, I et F les ensembles d'états initiaux et finaux, et dont la fonction de transition est $\Delta : \Sigma \to \mathcal{P}(\mathcal{Q} \times \mathcal{Q})$, $a \mapsto \underline{a}$: ainsi chaque $\underline{a}$ est une relation binaire sur l'ensemble des états. Un *calcul* de $\mathcal{A}$ sur le mot $\mathbf{u}$ est toute suite finie $q(0) \cdots q(|\mathbf{u}|)$ d'états telle que, pour chaque $k < |\mathbf{u}|$, $(q(k), q(k+1)) \in \underline{\mathbf{u}(k)}$ (on écrira $q(k)\ \underline{\mathbf{u}(k)}\ q(k+1)$) ; ce calcul est *réussi* si $q(0) \in I$ et $q(|\mathbf{u}|) \in F$. Le *langage* (*régulier*) *reconnu* par $\mathcal{A}$ est l'ensemble $L_{\mathcal{A}}$ des mots admettant un calcul réussi. La fonction de transition Δ s'étend aux mots : $\mathbf{u} \mapsto \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{P}(\mathcal{Q} \times \mathcal{Q})$ de façon à ce que $\underline{\epsilon} = \mathrm{id}_{\mathcal{Q}}$ (la relation associée au mot vide est l'identité de $\mathcal{Q}$) et pour tous mots $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, $\underline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} = \underline{\mathbf{u}} \circ \underline{\mathbf{v}} := \{(q, q'')\colon \exists q',\ q\,\underline{\mathbf{u}}\,q' \text{ et } q'\,\underline{\mathbf{v}}\,q''\}$ (chaque lettre étant identifiée à un mot de longueur 1). En particulier $L_{\mathcal{A}} = \{\mathbf{u} \in \Sigma^{<\omega}\colon \underline{\mathbf{u}} \cap (I \times F) \neq \varnothing\}$.

3.2. Structures automatiques

Étant donné un symbole $\square \notin \Sigma$, soit $\Sigma_{\square}$ l'alphabet $\Sigma \dot\cup \{\square\}$. Pour chaque mot $\mathbf{u}$ et tout entier $k \geqslant |\mathbf{u}|$, $\mathbf{u}(k)$ désignera le symbole $\square$. Pour chaque uplet $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ de mots sur Σ, $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)^{\otimes}$ désigne le mot sur ${\Sigma_{\square}}^m$ de longueur $\max\{|\mathbf{u}_1|, \ldots, |\mathbf{u}_m|\}$ tel que pour tout k, $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)^{\otimes}(k) = (\mathbf{u}_1(k), \ldots, \mathbf{u}_m(k))$. On étend la notation aux ensembles U de uplets de mots par $U^{\otimes} := \{\mathbf{x}^{\otimes}\colon \mathbf{x} \in U\}$.

Une τ-*structure automatique* $\langle L_V, L_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{R}\in\tau\rangle$ d'alphabet Σ est spécifiée par un langage régulier (de mots sur Σ) L_V, et, pour chaque symbole relationnel $\mathcal{R}$ d'arité m, une relation m-aire $L_{\mathcal{R}}$ sur L_V (c'est-à-dire une partie de ${L_V}^m$) telle que ${L_{\mathcal{R}}}^{\otimes}$ soit un langage régulier (de mots sur ${\Sigma_\square}^m$).

Étant donnée une telle structure $\mathfrak{A}$, pour chaque τ-formule $\varphi(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_p)$ et paramètre $\vec{b}\in|\mathfrak{A}|^p$, $\varphi(|\mathfrak{A}|^m,\vec{b})^{\otimes}$ est un ensemble rationnel (de mots sur ${\Sigma_\square}^m$) qui dépend récursivement de φ et $\vec{b}$ (voir [12,13,11,14, 2,3]).

4. Démonstrations des Propositions 1.1 et 1.2

On considère une structure automatique $\langle L_V, L_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{R}\in\tau\rangle$ d'alphabet Σ. Désignons par Γ l'ensemble $\Sigma^{<\omega}$ des mots sur Σ. Pour chaque partie S de Γ, soit $\overline{S} := S\cap L_V$ l'ensemble des sommets de la structure codés par des éléments de S. Pour chaque entier $n\in\mathbb{N}$, désignons par Γ_n l'ensemble des mots de longueur inférieure (ou égale) à n, puis désignons par $V_n := \overline{\Gamma_n}$ l'ensemble des sommets codés par de tels mots. Pour tout mot $\mathbf{s}$ de longueur au moins n, désignons par $\mathbf{s}\restriction n$ son segment initial de longueur n, c'est-à-dire $(\mathbf{s}(k)\colon 0\leqslant k<n)$.

Considérons un automate $\mathcal{A}_V = \langle \Sigma, \mathcal{Q}_V, \Delta_V, I_V, F_V\rangle$ reconnaissant L_V, pour chaque $\mathcal{R}\in\tau$ d'arité m, un automate $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} = \langle {\Sigma_\square}^m, \mathcal{Q}_{\mathcal{R}}, \Delta_{\mathcal{R}}, I_{\mathcal{R}}, F_{\mathcal{R}}\rangle$ reconnaissant ${L_{\mathcal{R}}}^{\otimes}$, et plus généralement, pour chaque τ-formule $\varphi(x,y_1,\ldots,y_p)$, un automate $\mathcal{A}_\varphi = \langle {\Sigma_\square}^{1+p}, \mathcal{Q}_\varphi, \Delta_\varphi, I_\varphi, F_\varphi\rangle$ reconnaissant ${L_\varphi}^{\otimes} := \varphi({L_V}^{1+p})^{\otimes}$. L'amorce commune des preuves des propositions consiste à jouer sur les observations suivantes (cf. Affirmations 1 et 3).

Observations. *Pour tous mots* $\mathbf{h},\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_m,\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_p$, *tels que les* $\mathbf{h}\cdot\mathbf{t}_\ell$ *et les* $\mathbf{s}_k$ *appartiennent à* L_V, *et que* $\mathbf{h}$ *soit au moins aussi long que chaque* $\mathbf{s}_k$,

$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{t}\in L_V \Longleftrightarrow \underline{\mathbf{h}}_V\circ\underline{\mathbf{t}}_V \text{ rencontre } I_V\times F_V. \tag{1}$$

$$\mathfrak{A}\models\mathcal{R}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{h}\cdot\mathbf{t}_m) \Longleftrightarrow \underline{(\mathbf{h},\ldots,\mathbf{h})^{\otimes}}_{\mathcal{R}}\circ\underline{(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_m)^{\otimes}}_{\mathcal{R}} \text{ rencontre } I_{\mathcal{R}}\times F_{\mathcal{R}}. \tag{2}$$

$$\mathfrak{A}\models\varphi(\mathbf{h}\cdot\mathbf{t}_0,\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_p) \Longleftrightarrow \underline{(\mathbf{h},\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_p)^{\otimes}}_{\varphi}\circ\underline{(\mathbf{t}_0,\epsilon,\ldots,\epsilon)^{\otimes}}_{\varphi} \text{ rencontre } I_\varphi\times F_\varphi. \tag{3}$$

4.1. Croissance relative. Preuve de la Proposition 1.1

Lemme 4.1. *Étant donné un ensemble fini* $\Phi(x)$ *de* τ-*formules, il existe un entier* c *tel que* $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\mathbf{s}\in L_V$, $\exists\mathbf{s}'\in V_{n+c}$ $\mathbf{s}'\sim^{\Phi}_{V_n}\mathbf{s}$. *En particulier, pour chaque partie* E *de* V_n *et toute partie* E-Φ-*libre* F *de* L_V, *il existe une partie* E-Φ-*libre de* V_{n+c} *de même taille que* F.

Preuve du Lemme. Soit $(x,y_1,\ldots,y_p)$ une énumération des variables admettant au moins une occurrence libre dans un élément de Φ. Considérons la fonction :

$$f:\Gamma\ni\mathbf{t}\longmapsto\big(\underline{\mathbf{t}}_V;\ \underline{(\mathbf{t},\epsilon,\ldots,\epsilon)^{\otimes}}_{\varphi}\colon \varphi\in\Phi\big)\in\mathcal{P}\big({\mathcal{Q}_V}^2\big)\times\prod_{\varphi\in\Phi}\mathcal{P}\big({\mathcal{Q}_\varphi}^2\big).$$

Cette fonction, qui prend ses valeurs dans un ensemble fini, disons de taille $c+1$, est définie de sorte que pour chaque $n\in\mathbb{N}$:

Affirmation 1. *Soit un mot* $\mathbf{h}$ *de longueur* n. *Pour tous* $\mathbf{t}$ *et* $\mathbf{t}'$ *dans* Γ, *si* $f(\mathbf{t})=f(\mathbf{t}')$, *alors*

$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{t}\in L_V\Leftrightarrow\mathbf{h}\cdot\mathbf{t}'\in L_V,\ \textit{auquel cas}\ \mathbf{h}\cdot\mathbf{t}\sim^{\Phi}_{V_n}\mathbf{h}\cdot\mathbf{t}'.$$

Preuve de l'Affirmation. Observations (1) et (3) ci-dessus. $\square_{\mathit{Affirm}}$

Affirmation 2. *Pour chaque* $\mathbf{t}\in\Gamma$, *existe un* $\mathbf{t}'$ *dans* Γ_c *de même image par* f.

Preuve de l'Affirmation. Il suffit de constater que pour tout mot $\mathbf{t}$ de longueur strictement supérieure à c, existe un mot strictement plus court de même image par f. Pour constater cela, observer que pour un tel $\mathbf{t}$, existent $0\leqslant k<\ell\leqslant|\mathbf{t}|$ tels que $f(\mathbf{t}\restriction k)=f(\mathbf{t}\restriction\ell)$, puis considérer $\mathbf{t}'=(\mathbf{t}\restriction k)\cdot\mathbf{v}$ pour l'unique $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{t}=(\mathbf{t}\restriction\ell)\cdot\mathbf{v}$. $\square_{\mathit{Affirm}}$

Maintenant considérons un $\mathbf{s} \in L_V$. Au cas où il n'appartiendrait pas déjà à V_{n+c}, considérer l'unique mot $\mathbf{t}$ tel que $\mathbf{s} = (\mathbf{s} \restriction n) \cdot \mathbf{t}$, puis $\mathbf{s}' = (\mathbf{s} \restriction n) \cdot \mathbf{t}'$ pour un $\mathbf{t}' \in \Gamma_c$ tel que $f(\mathbf{t}') = f(\mathbf{t})$. $\square$

Preuve de la Proposition 1.1. Soit σ le nombre d'éléments de Σ. Vérifions que la lim inf en question est inférieure à σ^c. Supposons, par l'absurde, que pour un certain $t > \sigma^c$ et un $N \in \mathbb{N}$:

$$\forall E \in \mathcal{F} \text{ avec } \operatorname{card} E \geqslant N \ (\forall G\ E\text{-}\Phi\text{-libre de taille maximum } \exists F \in \mathcal{F},\ F \subseteq G \text{ et } \operatorname{card} F \geqslant t \operatorname{card} E)$$

alors, partant d'un $F_0 \in \mathcal{F}$ tel que $\operatorname{card} F_0 \geqslant N$ et étant donné un $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel $F_0 \subseteq V_{n_0}$, on déduit d'applications répétées du Lemme 4.1 l'existence d'une suite $(F_k\colon k \in \mathbb{N})$ de $\mathcal{F}$ satisfaisant : $\forall k \in \mathbb{N}$, $F_k \subseteq V_{n_0+kc}$ et $\operatorname{card} F_k \geqslant t^k \operatorname{card} F_0$. Ainsi, comme $F_k \subseteq V_{n_0+kc}$ et que pour tout n $\operatorname{card} V_n \leqslant \operatorname{card} \Gamma_n \leqslant (n+1)\sigma^n$, il s'ensuit que $\forall k \in \mathbb{N}$ $t^k \operatorname{card} F_0 \leqslant \operatorname{card} F_k \leqslant \operatorname{card} V_{n_0+kc} \leqslant (n_0+kc+1)\sigma^{n_0+kc} \leqslant \sigma^{n_0} \times (n_0+kc+1) \times (\sigma^c)^k$, ce qui conduit à une contradiction (considérer k suffisamment grand). $\square$

4.2. Indécomposabilité. Preuve de la Proposition 1.2

Preuve de la Proposition 1.2. Considérons une τ-formule $\varphi(x, y_1, \ldots, y_p)$. Pour chaque $\vec{\mathbf{s}} = (\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_p) \in {L_V}^p$, et tout $\mathbf{h} \in \Gamma$ au moins aussi long que chacun des $\mathbf{s}_k$, soit

$$f(\mathbf{h}, \vec{\mathbf{s}}) := \Big(\underline{\mathbf{h}}_V, \underline{(\mathbf{h}, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_p)^{\otimes}}_{\varphi}, \underline{(\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h})^{\otimes}}_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{R} \in \tau\Big) \in \mathcal{P}\big({\mathcal{Q}_V}^2\big) \times \mathcal{P}\big({\mathcal{Q}_\varphi}^2\big) \times \prod_{\mathcal{R} \in \tau} \mathcal{P}\big({\mathcal{Q}_\mathcal{R}}^2\big).$$

Cette fonction f, qui prend ses valeurs dans un ensemble fini, est définie de sorte que :

Affirmation 3. *Le type d'isomorphie de* $\mathfrak{A} \restriction \varphi(\overline{\mathbf{h} \cdot \Gamma}, \vec{\mathbf{s}})$ *ne dépend que de* $f(\mathbf{h}, \vec{\mathbf{s}})$.

Preuve de l'Affirmation. Étant donnés deux mots $\mathbf{h}$ et $\mathbf{h}'$, considérons la bijection $\mathbf{h} \cdot \mathbf{t} \mapsto \mathbf{h}' \cdot \mathbf{t}$ entre $\mathbf{h} \cdot \Gamma$ et $\mathbf{h}' \cdot \Gamma$. Étant donnés deux uplets de mots $\vec{\mathbf{s}}$ et $\vec{\mathbf{s}}'$ tels que $f(\mathbf{h}, \vec{\mathbf{s}}) = f(\mathbf{h}', \vec{\mathbf{s}}')$, il résulte de l'Observation (1) ci-dessus que cette bijection envoie $L_V \cap (\mathbf{h} \cdot \Gamma)$ sur $L_V \cap (\mathbf{h}' \cdot \Gamma)$, puis de l'Observation (2) qu'il s'agit en fait d'un isomorphisme entre $\mathfrak{A} \restriction L_V \cap (\mathbf{h} \cdot \Gamma)$ et $\mathfrak{A} \restriction L_V \cap (\mathbf{h}' \cdot \Gamma)$; il résulte en outre de l'Observation (3) qu'elle envoie $\varphi(L_V \cap (\mathbf{h} \cdot \Gamma), \vec{\mathbf{s}})$ sur $\varphi(L_V \cap (\mathbf{h}' \cdot \Gamma), \vec{\mathbf{s}}')$; ainsi elle établit un isomorphisme entre $\mathfrak{A} \restriction \varphi(L_V \cap (\mathbf{h} \cdot \Gamma), \vec{\mathbf{s}})$ et $\mathfrak{A} \restriction \varphi(L_V \cap (\mathbf{h} \cdot \Gamma), \vec{\mathbf{s}})$. $\square_{\mathit{Affirm}}$

Étant donné alors un $\vec{\mathbf{s}} \in {L_V}^p$, considérer un majorant n de l'ensemble des longueurs des $\mathbf{s}_k$, puis la partition finie $\varphi(L_V, \vec{\mathbf{s}}) = \dot{\bigcup}_{\{\mathbf{u} \in \varphi(L_V, \vec{\mathbf{s}})\colon |\mathbf{u}| < n\}} \{\mathbf{u}\} \,\dot{\cup}\, \dot{\bigcup}_{\mathbf{h} \in \Sigma^n} \varphi(\overline{\mathbf{h} \cdot \Gamma}, \vec{\mathbf{s}})$. $\square$

Références

[1] U. Abraham, R. Bonnet, Hausdorff's theorem for posets that satisfy the finite antichain property, Fund. Math. 159 (1) (1999) 51–69.
[2] A. Blumensath, Automatic Structures, Diploma Thesis, RWTH, University of Aachen, 1999.
[3] A. Blumensath, E. Graedel, Automatic structures, in: LICS'00, 2000, pp. 51–62.
[4] P.W. Carruth, Arithmetic of ordinals with applications to the theory of ordered Abelian groups, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942) 262–271.
[5] H. Common, M. Dauchet, R. Gilleron, D. Lugiez, S. Tison, M. Tomassi, TATA: Tree Automata and Their Applications, http://l3ux02.univ-lille3.fr/tata/.
[6] M. Dauchet, S. Tison, The theory of ground rewrite systems is decidable, in: LICS'90, IEEE, 1990, pp. 242–248.
[7] C. Delhommé, Rado's graph is not automatic, Manuscript, 2001.
[8] C. Delhommé, Non automaticity of ω^ω, Manuscript, 2001.
[9] C. Delhommé, V. Goranko, T. Knapik, Automatic linear orderings, Manuscript, 2002.
[10] R. Fraïssé, Theory of relations, in: Stud. Logic, vol. 118, North-Holland, 1986.
[11] C. Frougny, J. Sakarovitch, Synchronized rational relations of finite and infinite words, Theoret. Comput. Sci. 108 (1993) 45–82.
[12] B.R. Hodgson, Théories décidables par automate fini, Thèse de doctorat, Université de Montréal, 1976, 171 p.
[13] B.R. Hodgson, Décidabilité par automate fini, Ann. Sci. Math. Québec 7 (1) (1983) 39–57.
[14] B. Khoussainov, A. Nerode, Automatic presentations of structures, in: Logic and Comput. Complex., Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 960, 1995, pp. 367–392.
[15] B. Khoussainov, S. Rubin, F. Stephan, On automatic partial orders, Manuscript, 2003.