Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 223–227
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie algébrique

Groupes vectoriels et schéma de Picard

Michel Raynaud

Université de Paris-Sud, UMR 8628 du CNRS, Mathématique, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France

Reçu le 3 décembre 2003 ; accepté le 5 décembre 2003

Présenté par Michel Raynaud

Résumé

Cette Note contient quelques variations sur un thème connu : les sous-groupes linéaires du foncteur de Picard d'un schéma propre sur un corps k. On montre en particulier, qu'en caractéristique $p > 0$, on peut avoir un corps k et un schéma projectif X sur k, normal, mais non géométriquement réduit, dont la composante neutre du foncteur de Picard est représentable par un k-schéma en groupes vectoriels non nul. ***Pour citer cet article : M. Raynaud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***
© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Vectorial group schemes of Picard functor. This Note contains slight variations on a well known theme: linear sub-groups of the Picard functor of a proper scheme over a field k. In particular, we give exemples of a field k, with positive characteristic, and a projective k-scheme X, normal, but not geometrically reduced, such that the neutral component of its Picard functor is representable by a nonzero vectorial group scheme. ***To cite this article: M. Raynaud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***
© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soient S un schéma et X un S-schéma propre et plat, de présentation finie.

Rappelons que, suivant Grothendieck ([2], Exp. N° 232, [1], p. 201), le foncteur de Picard relatif de X sur S est le faisceau fppf (c'est-à-dire pour la topologie fidèlement plate de présentation finie) $P_{X/S}$, associé au préfaixceau : $T \in \mathrm{Sch}/S \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T)$. Lorsque S est le spectre d'un corps k, $P = P_{X/k}$ est représentable par un k-schéma en groupes localement de type fini ; sa composante neutre P^0, ainsi que le sous-foncteur P^τ formé des points dont un multiple est dans P^0, sont représentables par des sous-schémas en groupes ouverts de P, de type fini ([3], SGA 6, exp. XII, p. 596, exp. XIII, p. 647).

Soient k un corps de caractéristique $p \geqslant 0$, k^s une clôture séparable de k, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k.

Commençons par rappeler les résultats plus ou moins classiques suivants :

Proposition 1.1. *Soient X un k-schéma propre et $P = P_{X/k}$ son schéma de Picard.*

Adresse e-mail : michel.raynaud@math.u-psud.fr (M. Raynaud).

1631-073X/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2003.12.005

(1) *Supposons X normal, irréductible et que X est géométriquement réduit au-dessus de $k' = \Gamma(X, O_X)$. Alors, pour toute k-variété unirationnelle Z, tout k-morphisme de Z dans P est constant. En particulier P^0 ne contient pas de sous-schéma en groupes isomorphe au groupe additif G_a ou au groupe multiplicatif G_m.*

(2) *Supposons X géométriquement unibranche* ([4], Chapitre IV, § 6) (*par exemple normal*), *alors P^0 ne contient pas de sous-tore non nul.*

(3) *Supposons X géométriquement normal, alors P^0_{red} est une k-variété abélienne.*

Démonstration. (1) Si $P' = P_{X/k'}$, alors P est la restriction de Weil de P' de k' à k ([2], Exp. N° 232, § 6). Par adjonction on a $\mathrm{Mor}_k(Z, P) = \mathrm{Mor}_{k'}(Z \times_k k', P')$. On peut donc remplacer X/k par X/k' et par suite, supposer X géométriquement réduit sur k. Pour établir (1) on peut étendre k à k^s, ce qui conserve la normalité de X. Alors X acquiert une k-section ε et P représente le foncteur de Picard des faisceaux inversibles rigidifiés le long de la section ε. On peut dominer la variété unirationnelle Z par un ouvert affine U d'un espace affine standard. Soient A l'anneau de U et K le corps des fractions rationnelles de X. Un morphisme u de U dans P correspond alors à un faisceau inversible L sur $U \times_k X$. La fibre générique de la projection $h : U \times_k X \to X$, a pour anneau $A \otimes_k K$ qui est encore factoriel. Par suite L est isomorphe à l'image réciproque par h d'un faisceau inversible sur X. C'est dire que u est constant.

(2) L'hypothèse que X est géométriquement unibranche se conserve par extension à la clôture algébrique $\bar{k}$ de k. On peut donc supposer k algébriquement clos. Soit Y le normalisé de X_{red}. L'hypothèse que X est géométriquement unibranche équivaut alors au fait que le morphisme canonique $Y \to X$ est un homéomorphisme universel et donc induit une équivalence entre revêtements finis étales de X et de Y ([3], SGA 1, Exp. IX, 4.9). Soit Q le foncteur de Picard relatif de Y sur k. La propriété (2) va résulter de la proposition plus précise suivante :

Proposition 1.2. *Le morphisme $P^\tau \to Q^\tau$, déduit de $Y \to X$, a un noyau et un conoyau unipotents.*

Démonstration. Il faut voir que noyau et conoyau ne contiennent pas de sous-groupe de type multiplicatif non nul. Pour tout entier n, notons μ_n le schéma en groupes de type multiplicatif des racines n-ièmes de 1. Par dévissage (confer [3], SGA 3, Exp. XVII, § 5), il suffit de voir que, pour tout entier n, l'application $\mathrm{Hom}(\mu_n, P) \to \mathrm{Hom}(\mu_n, Q)$ est une bijection. Par dualité ([5], § 6.2), on est ramené à montrer que l'application $H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) \to H^1_{\mathrm{et}}(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est une bijection, ce qui est clair puisque $Y \to X$ est un homéomorphisme universel.

(3) Supposons d'abord k algébriquement clos. Il résulte de (1) que P^0_{red} ne contient pas de sous-schéma en groupes isomorphe à G_a ou G_m, et par suite, d'après un résultat de Chevalley, P^0_{red} est une variété abélienne (confer [2], Exp. N° 236, Théorème 2.1(ii)). Dans le cas général, P^0_{red} est encore une k-variété abélienne, comme on le voit par descente de $\bar{k}$ à k, en notant que, pour tout entier n, premier à la caractéristique de k, le noyau de la multiplication par n dans P^0, soit ${}_nP^0$, est étale sur k et que, pour n variable, les ${}_nP^0$ forment une famille Zariski dense dans P^0_{red}.

Remarque 1. (a) Pour établir (2), on peut aussi utiliser le dévissage de Oort ([3], SGA 6, Exp. XII, § 3).

(b) Soit k un corps non parfait de caractéristique p. Rappelons qu'il existe des k-schémas en groupes lisses unipotents connexes, non nuls, qui sont des k-variétés rationnelles, et qui ne contiennent pas de sous-k-schéma en groupes isomorphe à G_a. Pour en obtenir, considérons une extension finie radicielle non triviale k' de k et soit G la restriction de Weil de k' à k du groupe multiplicatif G_m. Alors G est une extension d'un groupe unipotent U par G_m et l'on voit facilement que G et U sont des variétés rationnelles. Si G contenait un sous-schéma en groupes V isomorphe à G_a, il résulterait du lemme ci-après que la restriction de l'extension ci-dessus, serait triviale au-dessus de V. Ce qui n'est pas, car G ne contient pas d'élément d'ordre p dans k^s.

Lemme 1.3. *Soit G un k-schéma en groupes extension d'un k-groupe lisse unipotent connexe V par G_m. Supposons que cette extension possède une section algébrique $s : V \to G$ (ce qui sera le cas si l'anneau de V est factoriel, en particulier si $V = G_a$). Alors l'extension G de V par G_m est triviale.*

En effet, G_m est nécessairement dans le centre de G et cette extension est donnée par la classe dans $H^2(U, G_m)$ d'un 2-cocycle algébrique ([3], SGA 3, Exp. XVII, Appendice I). Or un 2-cocycle correspond à une certaine fonction inversible sur $U \times_k U$, qui vaut 1 à l'origine, donc est égale à 1, car les fonctions inversibles sur $U \times U$ se réduisent à k^*. On le voit en passant à la clôture algébrique $\bar{k}$ de k, auquel cas U, donc aussi $U \times U$ devient isomorphe (comme schéma) à l'espace affine standard.

Example 1. Soient k_0 un corps parfait, k une k_0-extension de type fini de degré de transcendance 1, X un k-schéma propre normal irréductible, k' le corps des fonctions globales sur X. Alors X est géométriquement réduit sur k', et le schéma de Picard de X sur k, ne contient pas de sous-schéma en groupes unirationnel non nul.

Démonstration. Compte tenu de la Proposition 1.1(1), on peut supposer $k = k'$ et on doit montrer que X est géométriquement réduit sur k. On peut donc supposer $p > 0$. Soit K le corps des fractions rationnelles de X. Comme X est normal, de corps des fonctions globales k, l'application naturelle $k/k^p \to K/K^p$ est injective, donc induit une application injective au niveau des 1-différentielles $\Omega^1_{k/k_0} \to \Omega^1_{K/k_0}$. L'hypothèse faite sur k entraîne que Ω^1_{k/k_0} est un k-vectoriel de dimension 1. Par suite l'application K-linéaire $\Omega^1_{k/k_0} \otimes_k K \to \Omega^1_{K/k_0}$ est encore injective. Elle s'insère dans une suite exacte :

$$0 \to \Omega^1_{k/k_0} \otimes_k K \to \Omega^1_{K/k_0} \to \Omega^1_{K/k} \to 0.$$

Si n est le degré de transcendance de K sur k, le terme médian est de dimension $n + 1$ sur K, donc le terme de droite est de dimension n sur K et par suite X est génériquement lisse sur k et en particulier X est géométriquement réduit.

Nous allons voir que la conclusion de l'exemple ci-dessus ne s'étend pas à des corps k « plus imparfaits », pour lesquels $[k : k^p] \geqslant p^2$.

2. Résultats

Soient S un schéma, et $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_S$-module de présentation finie. Suivant Grothendieck, on lui associe le foncteur en modules $\mathbf{V}_{\mathcal{N}} : T \in \mathrm{Sch}/S \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{N} \times_S T, \mathcal{O}_T)$, qui est représentable par un S-« fibré vectoriel » de présentation finie, lisse sur S lorsque $\mathcal{N}$ est localement libre sur $\mathcal{O}_S$.

Soient maintenant $f : X \to S$ un S-schéma propre de présentation finie et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie, S-plat. Fixons un entier i. On définit un foncteur en modules $\mathbf{H}^i_{\mathcal{M}} : T \in \mathrm{Sch}/S \mapsto H^0(T, (R^i f_T)_*(\mathcal{M} \otimes_S T))$. Le foncteur $\mathbf{H}^i_{\mathcal{M}}$ est donc le faisceau associé (pour la topologie de Zariski) au préfaisceau $T \mapsto H^i(T, \mathcal{M} \otimes_S T)$. Si $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$, on le notera aussi H^i_X. Rappelons que si $\mathcal{M}$ est cohomologiquement plat sur S en dimension $i - 1$, alors le foncteur $\mathbf{H}^i_{\mathcal{M}}$ est représentable par un fibré vectoriel (au sens ci-dessus) : il existe un $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{N}$ de présentation finie et un isomorphisme de foncteurs : $\mathbf{H}^i_{\mathcal{M}} \simeq \mathbf{V}_{\mathcal{N}}$.

Considérons un schéma S de caractéristique $p > 0$ et soit $S' \to S$ un morphisme fini et plat qui est radiciel de hauteur 1, c'est-à-dire, tel que $S' \to S$ soit un homéomorphisme et que l'idéal $\mathcal{J}''$ qui définit la diagonale de $S'' = S' \times_S S'$ vérifie $\mathcal{J}''^{[p]} = 0$ (les puissances p-ièmes des sections de $\mathcal{J}''$ sont nulles).

Soient $f : X \to S$ un schéma propre et plat de présentation finie et notons $f : X' \to S'$ (resp. $f'' : X'' \to S''$) son image réciproque sur S' (resp. S''). On suppose de plus qu'il existe un faisceau d'idéaux nilpotent $\mathcal{I}'$ de $\mathcal{O}_{X'}$, de présentation finie et tel que $\mathcal{I}'^{[p]} = 0$, qui définit un sous-schéma fermé Y' de X', plat sur S'.

Proposition 2.1. *Gardons les notations et hypothèses précédentes. On suppose de plus* :

– *X est cohomologiquement plat sur S en degré* 0.
– *Y' est cohomologiquement plat sur S' en degré* 0 *et le morphisme canonique* $f'_*(0_{X'}) \to f'_*(0_{Y'})$ *est* (*universellement*) *surjectif.*
– $R^1 f'_*(0_{Y'}) = 0$ *universellement.*

Alors la composante neutre P^0 du foncteur de Picard relatif P de X au-dessus de S est canoniquement isomorphe au fibré vectoriel $\mathbf{H}^1_X$.

Avant d'aborder la démonstration, qui est un simple exercice de descente radicielle, donnons un exemple où cet énoncé s'applique.

Example 2. Soient k_0 un corps de caractéristique $p > 0$, u et v des indéterminées et k le corps $k_o(u, v)$. En coordonnées homogènes $A, B, \ldots,$ considérons la k-courbe projective plane X qui a pour équation $uA^p + vB^p + C^p = 0$ (resp. pour $p = 2$, la courbe gauche d'équations : $AB + C^2 + D^2 = 0$, $uA^2 + vB^2 + C^2 = 0$). Alors X est une courbe normale, mais non géométriquement réduite. La composante neutre P^0 de son foncteur de Picard est représentable par le fibré vectoriel H^1_X, qui est un k-vectoriel de dimension $(p-1)(p-2)/2$ (resp. 1).

Remarque 2. Dans l'exemple ci-dessus, du moins lorsque $P^0 \neq 0$, il n'existe pas de faisceau inversible universel sur $P^0 \times_k X$, sinon on conclurait, comme dans la démonstration de la Proposition 1.1(1), que $P^0 = 0$. L'obstruction à l'existence d'un tel faisceau inversible est un élément d'ordre p du groupe de Brauer $H^2_{\text{et}}(P^0, G_m)$ qui s'annule après extension du corps de k à $k' = k(u^{1/p})$, car X acquiert un point rationnel sur k'.

Démonstration de la Proposition 2.1. Rappelons d'abord que si $\mathcal{M}$ est un faisceau d'idéaux d'un schéma Z de caractéristique $p > 0$, tel que $\mathcal{M}^{[p]} = 0$, alors le sous-faisceau en groupes multiplicatifs $(1 + \mathcal{M})$ du faisceau des unités $\mathcal{O}^*_Z$, est canoniquement isomorphe à $\mathcal{M}$ grâce aux isomorphismes réciproques l'un de l'autre Log et Exp.

Notons P le foncteur de Picard relatif de X sur S, P' (resp. P'') ses images réciproques sur S' (resp. S'') et soit Q' le foncteur de Picard de Y' sur S'. Plaçons-nous d'abord sur S'. Le fait que $R^1 f'_*(0_{Y'})$ soit nul universellement entraîne que le foncteur Q' est non ramifié sur S' et que la section unité de Q' est représentable par une immersion ouverte.

A l'immersion fermée $Y' \to X'$ correspond un S'-morphisme de foncteurs $P' \to Q'$. Notons N' son noyau. Donc N' majore la composante neutre P'^0 de P'.

Considérons la suite exacte de faisceaux :

$$0 \to \mathcal{I}' \to \mathcal{O}_{X'} \to 0_{Y'} \to 0.$$

Avec les hypothèses faites, l'application $R^1 f'_*(X', \mathcal{I}') \to R^1 f'_*(X', \mathcal{O}_{X'})$ est bijective et le reste après tout changement de base $T' \to S'$. Comme $\mathcal{I}'^{[p]} = 0$, on a un isomorphisme de faisceaux en groupes : $\mathrm{Exp}: \mathcal{I}' \to (1 + \mathcal{I}')$, donc un isomorphisme $\alpha': H^1(X', \mathcal{I}') \to H^1(X', (1 + \mathcal{I}'))$. Or N' est le faisceau fppf associé au préfaisceau $T' \in \mathrm{Sch}/S' \mapsto H^1(X', (1 + \mathcal{I}'))$. Finalement, le foncteur N' est canoniquement isomorphe à $\mathbf{H}^1_{\mathcal{I}'}$, lui-même isomorphe à $\mathbf{H}^1_{X'}$. On en déduit que P'^0 est égal à N' et est canoniquement représenté par $\mathbf{H}^1_{X'}$.

Il reste à voir que l'isomorphisme $\mathbf{H}^1_{X'} \to P'^0$ que l'on vient de construire, se descend en un isomorphisme $\mathbf{H}^1_X \to P^0$.

Comme les hypothèses faites sont stables par changement de base $T \to S$, il suffit d'établir la propriété suivante :

Supposons S affine et soit $a \in H^1(X, \mathcal{O}_{X'})$. Notons a' (resp. a'') son image dans $H^1(X', \mathcal{O}_{X'})$ (resp. $H^1(X'', \mathcal{O}_{X''})$). Soit $b \in H^1(X', I') \xrightarrow{\sim} H^1(X', \mathcal{O}_{X'})$ correspondant à a'. On lui associe par l'exponentielle, un élément c' de $H^1(X', 1 + \mathcal{I}')$ et donc un faisceau inversible $\mathcal{L}'$ sur X', trivial sur Y'. Soient $\mathcal{L}''_1$ et $\mathcal{L}''_2$ les faisceaux inversibles sur X'', images réciproques de $\mathcal{L}'$ par les deux projections $X'' \to X'$. Il nous faut montrer que $\mathcal{L}''_1$ et $\mathcal{L}''_2$ définissent le même élément de $P''(S'')$. En effet, par définition du faisceau fppf associé, $\mathcal{L}'$ correspondra alors à un point de $P(S)$.

Or soit $\mathcal{K}''$ le faisceau d'idéaux de X'' engendré par l'idéal diagonal $\mathcal{J}''$ de X'' et par les deux images réciproques $\mathcal{I}_1''$ et $\mathcal{I}_2''$ de $\mathcal{I}'$. On a donc $\mathcal{K}''^{[p]} = 0$. Le sous-schéma fermé Y'', défini par $\mathcal{K}''$ est situé au-dessus de la diagonale de S'' et s'identifie naturellement à Y'. L'application $f_*''(\mathcal{O}_{X''}) \to f_*''(\mathcal{O}_{Y''})$ est encore surjective. On conclut que l'application, $H^1(X'', \mathcal{K}'') \to H^1(X'', \mathcal{O}_{X''})$ est bijective.

Considérons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & H^1(X, \mathcal{O}_X) \arrow[d] \\
H^1(X', \mathcal{I}'') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) \arrow[d] \\
H^1(X'', \mathcal{K}'') \arrow[r, "\sim"] & H^1(X'', \mathcal{O}_{X'}).
\end{tikzcd}$$

On en déduit que les deux images de b' dans $H^1(X'', \mathcal{K}'')$ coïncident, puis que les deux images de c' dans $H^1(X'', (1 + \mathcal{K}''))$ coïncident. A fortiori, $\mathcal{L}_1''$ et $\mathcal{L}_2''$ sont des faisceaux inversibles isomorphes.

Références

[1] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, Néron Models, in: Ergebn. Math. Grenzgeb. (3), vol. 21, 1980.

[2] A. Grothendieck, Fondements de la Géométrie Algébrique, Sém. Bourbaki, Les schémas de Picard : théorèmes d'existence, exp. N$^{\mathrm{o}}$ 232 ; propriétés générales, exp. N$^{\mathrm{o}}$ 236 (1961–1962), Benjamin, New York, 1966.

[3] A. Grothendieck, Séminaire de Géométrie Algébrique (cité SGA). SGA 1 : Revêtements étales et groupe fondamental, in : Lecture Notes in Math., vol. 224, 1971 ; SGA 3 : Schémas en groupes II ; in : Lecture Notes in Math., vol. 152, 1970 ; SGA 6 : Théorie des intersections et théorème de Riemann–Roch ; in : Lecture Notes in Math., vol. 225, 1971.

[4] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Eléments de géométrie algébrique, Chapitre IV (cité EGA) : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Pub. Math. IHES 24 (1965).

[5] M. Raynaud, Spécialisation du foncteur de Picard, Pub. Math. IHES 38 (1970) 27–76.