Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE @ DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 559–564
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Problèmes mathématiques de la Mécanique

Sur une loi de conservation issue de la géologie

Guy Vallet

Laboratoire de mathématiques appliquées, FRE CNRS 2570, IPRA, BP1155, 64013 Pau cedex, France

Reçu le 15 août 2003 ; accepté le 27 août 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Dans cette Note, nous nous intéressons à l'étude théorique d'un modèle stratigraphique de formation des bassins géologiques par sédimentation. Après la présentation du modèle physique à désagrégation limitée, nous proposons une formulation mathématique à l'aide d'une loi de conservation originale. Ensuite, nous donnons la définition d'une solution ainsi que des outils mathématiques pour aborder le problème. Nous terminons par l'étude plus élaborée du cas monodimensionnel, avant de présenter quelques problèmes ouverts. ***Pour citer cet article : G. Vallet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

On a conservation law arising from Geology. In this Note, we are interested in the theoretical analysis of a geological stratigraphic model, taking into account a limited weathering condition. Firstly, we present the physical model and the mathematical formulation, which lead to an original conservation law. Then, the definition of a solution and some mathematical tools in order to resolve the problem are given. At last, we treat the 1-D case and we present some open problems. ***To cite this article: G. Vallet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

New stratigraphic models lead to mathematical questions which are difficult to answer. The main processes in sedimentary basin evolution are the erosion, deposition mechanism of sediments and vertical compaction. At large scale in time and space, dynamic-slope approaches are usually preferred to fluid flow models. See Greanjeon et al. [10] and Eymard et al. [7] for the multi-lithological model, or Antontsev et al. [1] and Gagneux et al. [4] for mathematical studies of the mono-lithological case.

The model proposed states a mathematical description of the coupling of the weather limited erosion and a diffusion model, following the ideas from the Institut Français du Pétrole.

Let us consider a sedimentary basin, denoted by Ξ, with base Ω, and, for any positive T, note $Q =]0, T[\times \Omega$.

Adresse e-mail : guy.vallet@univ-pau.fr (G. Vallet).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.08.012

One assumes that the flow of matter $\vec{q}$ is proportional to ∇u where one denotes by u the sediments height (topography). Then, the weathering limited process is expressed as an inequality constraint on the erosion rate $-\frac{\partial u}{\partial t}$ in the following way: $E + \frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$ where E is a given positive function of t.

In order to reconcile this claim with a conservative formulation, one has to introduce a suitable duality multiplier λ, a priori in $[0, 1]$, such that $\vec{q} = \lambda \nabla u$. Therefore, mathematical modelling leads to a free boundary problem via the pair (λ, u) solving Eq. (1) completed by homogeneous Dirichlet boundary conditions and by an initial data u_0.

As one may construct many solutions to such a problem, one has to impose the unilateral condition (2) for the flux limitor and the inequality constraints on the erosion rate. One proposes in Antontsev, Gagneux and Vallet [2] a mathematical conservative formulation taking into account (2). In order to do this, let us note H the maximal monotone graph of the Heaviside function, then (λ, u) is formally solution of (3); hence our interest for equations and differential inclusions of the type:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\left(a\left(\frac{\partial u}{\partial t} + E\right)\nabla u\right) \quad \text{and} \quad 0 \in \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\left(H\left(\frac{\partial u}{\partial t} + E\right)\nabla u\right) \quad \text{respectively.}$$

Therefore, one may look for a relevant solution to this problem in the sense of Definition 2.1 by using the implicit time-discretized scheme (4). Thanks to appropriate a priori estimates, one proves the existence of a mild solution in the sense of Bénilan et al. [5], but the difficulty is to make sense of the continuity equation. Nevertheless, in the 1-D case, the existence of a solution is proven in the last section.

1. Introduction et présentation du modèle

Pour de grandes échelles de temps et d'espace, les modèles stratigraphiques doivent rendre compte du transport des sédiments, en connaissant a priori la tectonique, l'eustatisme et les flux de sédiments aux frontières du bassin, comme le présentent Greanjeon et al. [10] et Eymard et al. [7] dans le cas multilithologique, ou encore Antontsev et al. [1] et Gagneux et al. [4] pour une étude mathématique du cas monolithologique. On y est conduit à considérer un modèle gravitaire où le flux de sédiments est proportionnel au gradient de la topographie, moyennant un coefficient de diffusion K. La base du bassin est un domaine fixe Ω dont on connaît la position verticale $H(t, x)$ à chaque instant t et pour tout x de Ω. Enfin, si on note u la hauteur de sédiments, en fonction de t et de x, la topographie est donnée par $H + u$. L'aspect original de ce modèle « weather limited » (i.e. à désagrégation limitée) développé à l'Institut Français du Pétrole, réside dans l'imposition d'une contrainte d'obstacle sur le taux d'érosion $-\frac{\partial u}{\partial t}$ qui doit rester inférieur à une fonction positive donnée E. Pour ce faire, le flux diffusif $-K\,\nabla(H + u)$ est corrigé de façon à respecter la contrainte, tout en maintenant une formulation conservative, par l'introduction d'un flux réel $-\lambda K \nabla(H + u)$, où λ est une fonction à valeurs a priori dans $[0, 1]$, à choisir « convenablement ».

D'où l'équation dans $Q = \Omega \times \left]0, T\right[$: $\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}[\lambda K \nabla(H + u)] = 0$ avec $\frac{\partial u}{\partial t} + E \geqslant 0$, $E : t \mapsto E(t)$.

Pour sérier les difficultés, nous proposons dans cette Note des conditions de bord du type Dirichlet homogène. Les auteurs précédemment cités envisagent des conditions pariétales faisant apparaître une contrainte unilatérale d'asservissement instantané sur une partie du bord dont l'analyse mathématique se fonde sur le chapitre 2 de Duvaut et Lions [6] (voir aussi les « nouveaux problèmes unilatéraux » de J.-L. Lions [8], p. 420) traitant de l'asservissement thermique instantané au bord.

Pour simplifier, on suppose de plus H constant et $K = \mathrm{Id}$, de sorte que l'étude porte sur le problème de frontière libre suivant : rechercher les couples (λ, u) a priori dans $L^\infty(Q) \times [H^1(Q) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))]$, tels que $\frac{\partial u}{\partial t} + E \geqslant 0$ dans Q, $u(0, \cdot) = u_0$ dans Ω avec u_0 dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et régis par la loi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \operatorname{Div}\left\{\lambda(t, x)\nabla u(t, x)\right\} = 0 \quad \text{dans } Q. \tag{1}$$

À ce stade, il est essentiel de faire une double remarque, illustrée par l'exemple élémentaire suivant lorsque $E = 0$. Puisque $\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$, on montre que pour presque tout t, $\lambda \nabla u^+ = 0$ p.p. dans Ω.

(i) Si, par exemple, $u_0 \geqslant 0$ dans un ouvert ω non vide de Ω, alors $\lambda\nabla u = 0$ p.p. dans ω. L'équation révèle que $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ p.p. dans ω puis que $u(t,\cdot) = u_0$ p.p. dans ω. Il suffit alors de choisir u_0 de sorte que $\nabla u_0 \neq 0$ dans ω pour se rendre compte que le problème dégénère par annulation de λ.

(ii) Dès lors que $\nabla u_0 = 0$ dans ω, λ est quelconque et la modélisation nécessite un critère pour sélectionner le représentant de λ physiquement admissible.

Gallouët et Masson dans [7] proposent de considérer une contrainte instantanée globale d'asservissement de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + E \geqslant 0, \quad 1 - \lambda \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} + E\right)(1-\lambda) = 0 \quad \text{dans } Q. \tag{2}$$

Notons que cette contrainte supplémentaire s'avère insuffisante pour assurer l'unicité de la solution. En effet, dans la seconde partie de l'exemple ci-dessus, il existe encore une infinité de solutions possibles et un critère de maximalité sur λ dans $[0,1]$ est à considérer pour la sélection réaliste $\lambda = 1_{\{\nabla u_0 = 0\}}$.

Gallouët remarque dans [9] qu'il est important de rechercher une « bonne » formulation du problème. Dans ce but, on propose dans Antontsev, Gagneux et Vallet [2] une écriture conservative englobant (2). Si on note H le graphe maximal monotone de Heaviside (i.e. $H(x) = 0$ si $x < 0$, $H(x) = 1$ si $x > 0$ et $H(0) = [0,1]$), alors (λ, u) est solution du problème de Cauchy–Dirichlet :

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda\nabla u) \quad \text{où } \lambda \in H\left(\frac{\partial u}{\partial t} + E\right) \quad \text{dans } Q, \qquad u(0,\cdot) = u_0, \qquad u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

d'où l'intérêt pour l'étude des équations (resp. inclusions différentielles) du type nouveau et hyperbolique dégénéré (informellement, à cause du terme $a'(\frac{\partial u}{\partial t} + E)\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\nabla u$),

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\left(a\left(\frac{\partial u}{\partial t} + E\right)\nabla u\right) \quad \left(\text{respectivement } 0 \in \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\left(H\left(\frac{\partial u}{\partial t} + E\right)\nabla u\right)\right).$$

À notre connaissance, il n'existe pas d'étude mathématique de telles équations, alors que Antontsev fait remarquer dans [2] la présence de lois de conservation de la forme $0 = \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(a(u, \frac{\partial u}{\partial t})\nabla u)$ en mécanique des fluides : voir [11] et [12].

2. Définition d'une solution physiquement admissible et existence

Définition 2.1. Une solution physiquement admissible de (3) est un couple (λ, u) de $L^\infty(Q) \times [H^1(Q) \cap L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))]$ tel que $\lambda \in H(\frac{\partial u}{\partial t} + E)$ et vérifiant pour presque tout t et pour tout v de $H_0^1(\Omega)$, $\int_\Omega \{\frac{\partial u}{\partial t} v + \lambda\nabla u\nabla v\}\,\mathrm{d}x = 0$ avec $u(0,\cdot) = u_0$, où λ est maximal au sens où pour tout autre solution (μ, w) de (3) dans $L^\infty(Q) \times [H^1(Q) \cap L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))]$, alors $\mu \leqslant \lambda$ p.p. dans Q.

Le critère de maximalité, conforme à la pratique des géologues [10] garantit l'unicité en écartant des solutions physiquement non pertinentes. Pour mettre en évidence l'existence d'une telle solution, on propose une méthode de semi-discrétisation de la variable temps, via une technique de viscosité artificielle. Enfin, on suppose que E est une fonction régulière du temps (obstacle mobile).

Ainsi, pour les deux paramètres réels strictement positifs ε et h, on note $E_k = E(kh)$,

$$H_\varepsilon(x) = \max\left[\varepsilon, \min\left(\frac{x}{\varepsilon} + \varepsilon, 1\right)\right] \quad \text{et} \quad F_\varepsilon^k(x) = \int_0^x \frac{1}{H_\varepsilon(t + E_k)}\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout réel } x.$$

Proposition 2.2. *Il existe une unique suite $(u_\varepsilon^k)_k$ dans $H_0^1(\Omega)$ telle que $u_\varepsilon^0 = u_0$ et vérifiant*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \left\{ \frac{u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1}}{h} v + H_\varepsilon\left(\frac{u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1}}{h} + E_k \right) \nabla u_\varepsilon^k \cdot \nabla v \right\} \mathrm{d}x = 0.$$

De plus, $0 \leqslant u_\varepsilon^k \leqslant \operatorname{sup\,ess}_\Omega u_0$.

La preuve s'articule autour du théorème de point fixe de Schauder–Tykonov et du principe de maximum.

Lemme 2.3. *Indépendamment de ε et h, la suite $(u_\varepsilon^k)_k$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et vérifie,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{n} \left\| u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| u_\varepsilon^n \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \sum_{k=1}^{n} \left\| u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leqslant \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Il suffit pour cela d'employer la fonction-test $v = F_\varepsilon^k((u_\varepsilon^k - u_\varepsilon^{k-1})/h)$.

Le premier passage à la limite porte sur le paramètre ε pour énoncer le résultat de convergence suivant :

Proposition 2.4. *Il existe une suite $(\lambda_k, u^k)_k$ dans $L^\infty(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ telle que $\lambda_k \in H((u^k - u^{k-1})/h + E_k)$,*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \left\{ \frac{u^k - u^{k-1}}{h} v + \lambda_k \nabla u^k \cdot \nabla v \right\} \mathrm{d}x = 0, \quad u^0 = u_0. \tag{4}$$

De plus, $0 \leqslant u^k \leqslant \operatorname{sup\,ess}_\Omega u_0$ *et* $u^k \geqslant u^{k-1}$ *p.p. dans* Ω.

Notons alors $\hat{u}_h(t, x) = \sum_{k=0}^{N} [\frac{u^k - u^{k-1}}{h}(t - kh) + u^{k-1}] 1_{[kh,(k+1)h]}$ où $u^{-1} = u^0$ et $h = T/N$, pour obtenir que

Proposition 2.5. *La suite $(\hat{u}_h)$ est bornée dans $H^1(Q) \cap L^\infty(Q) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, de sorte qu'elle est relativement compacte dans $C([0, T], L^2(\Omega))$.*

De plus, $\lambda_h = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k I_{[kh,(k+1)h[} \in H(\frac{\partial \hat{u}_h}{\partial t} + E_k)$, $\frac{\partial \hat{u}_h}{\partial t} \geqslant 0$ *p.p. dans Q et il vient* :

$$\forall v \in L^2\big(0, T, H_0^1(\Omega)\big), \quad \int_Q \left\{ \frac{\partial \hat{u}_h}{\partial t} v + \lambda^h \nabla \hat{u}_h \cdot \nabla v \right\} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \mathrm{o}(h). \tag{5}$$

Chaque point d'accumulation représente une « bonne solution » au sens de Bénilan et al. [5]; cependant, la double convergence faible fait difficulté pour passer à la limite dans le terme $\int_Q \lambda^h \nabla \hat{u}_h \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$.

Dans le paragraphe suivant, on propose une possibilité de passage à la limite en dimension un d'espace, mais observons en premier lieu quelques cas de figures triviaux :

(i) si $u_0 \geqslant 0$ dans Ω, alors la solution est $(1_{\{\nabla u_0 = 0\}}, u_0)$;
(ii) si u_0 est négatif avec $\Delta u_0 \geqslant 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, la solution réaliste est $(1, w)$ où w est la solution de l'équation de diffusion de la chaleur, le couple $(0, u_0)$ étant une solution par artefact.

3. Étude en dimension un d'espace

Dans cette section, $\Omega =]-1, 1[$ et on suppose que $E = 0$.

Commençons par cette remarque, essentielle pour dégager un principe constructif : puisque la suite (u^k) est croissante, la fonction $x \mapsto (\lambda^1 u^{k\prime})(x)$ est continue et croissante sur $[-1, 1]$. Cela permet en particulier de montrer que si u_0 est positif sur $]-1,-1+\varepsilon[\,\cup\,]1-\varepsilon,1[$ pour un ε positif, alors $\lambda^1 u^{1\prime}=0$ et $u^1=u_0$ dans $]-1,1[$. Par induction, la solution recherchée pour le problème (3) est $(1_{\{\nabla u_0=0\}}, u_0)$.

Supposons désormais $u_0 \geqslant 0$ sur $]-1,0]$ et $u_0 \leqslant 0$ et convexe sur $[0,1[$ avec u_0 strictement décroissant sur $[0,\alpha]$, constant sur $[\alpha,\beta]$ (si nécessaire, sinon $\alpha=\beta$) et strictement croissant sur $[\beta,1]$.

D'après ce qui précède, à la première itération $u^1=u_0$ dans $[-1,0]$ et comme $u_0 \leqslant 0$ dans $]0,1[$, le principe du maximum assure que $u^1 \leqslant 0$ aussi.

Notons $x(h)=\sup\{x\in[-1,1],\ \lambda^1 u^{1\prime}(x)=0\}$. On recherche $x(h)<1$ et on remarque que nécessairement $x(h)>0$, sinon, on aurait une contradiction avec $u^1(1)=0$.

On est donc ramené à rechercher $\bar{x}(h)>0$, $u^1\in H^1(\bar{x}(h),1)$ et $\lambda^1\in H((u^1-u_0)/h)$ avec $\lambda^1>0$, tel que

$$u^1-h\big(\lambda^1 u^{1\prime}\big)'=u_0 \quad \text{dans } \big]\bar{x}(h),1\big[,\ \text{avec } u^1\big(\bar{x}(h)\big)=u_0\big(\bar{x}(h)\big),\ u^{1\prime}\big(\bar{x}(h)\big)=0 \text{ et } u^1(1)=0.$$

On montre l'existence et l'unicité d'un tel point $\bar{x}(h)\leqslant\alpha$ et on justifie que $x(h)=\bar{x}(h)$. Cela nous permet de construire explicitement l'itération u^1 et de remarquer que u^1 est négatif et convexe sur $]0,1[$, strictement décroissant sur $]0,x(h)[$ puis strictement croissant sur $]x(h),1[$. Enfin, on prouve qu'il ne peut pas exister une autre solution (μ,w) telle que $\mu>0$ sur $]-1,x(h)[$. Ainsi, la solution construite est la solution maximale au regard des relèvements possibles de $H((u^1-u_0)/h)$.

Il est donc possible de poursuivre la construction de u^k et λ^k par récurrence de la façon suivante : il existe une suite décroissante de points $x^k(h)$ dans $[0,\alpha]$ telle que

$$\lambda^k=1_{]x^k(h),1[} \quad \text{et} \quad u^k=u_0\,1_{]-1,x^k(h)]}+w^k\,1_{]x^k(h),1[},$$

où w^k est la solution du problème :

$$w^k-h\big(w^k\big)''=u_0 \quad \text{dans } \big]x^k(h),1\big[\ \text{avec } w^k\big(x^k(h)\big)=u_0\big(x^k(h)\big),\ \big(w^k\big)'\big(x^k(h)\big)=0 \text{ et } w^k(1)=0.$$

Ainsi, suivant la notation de la propriété 2.5, $(\lambda_h)_h$ est une suite bornée dans $\overline{BV}(Q)\cap L^\infty(Q)$ avec en particulier $\operatorname{var}(\lambda_h)\leqslant T+1$. Une sous-suite extraite converge donc p.p. dans Q et dans $L^1(Q)$ vers un élément λ de $L^\infty(Q)$ avec $0\leqslant\lambda\leqslant1$ p.p. dans Q.

De plus, à la limite, par un argument de monotonie, on a $(\lambda-1)\frac{\partial u}{\partial t}=0$ p.p. dans Q.

Ainsi, $\lambda\in H(\frac{\partial u}{\partial t})$ et comme le passage à la limite dans (5) est devenu possible, on a bien construit une solution u au problème (3), avec l'information supplémentaire, propre au cas 1-D, que $u\in C^0(\overline{Q})$ selon le théorème d'Ascoli. Notons que la convergence p.p. avec des valeurs de la suite $(\lambda_h)_h$ dans $\{0,1\}$ implique que $\lambda(t,x)\in\{0,1\}$ et donc p.p. $\lambda=1_\omega$ où $\omega\subset Q$ est un ensemble à périmètre fini.

On montre que la frontière libre $\partial\omega\cap Q$ est le graphe d'une fonction $t\mapsto\xi(t)$ décroissante, continue.

3.1. *Conclusion et problèmes ouverts*

On présente ici une nouvelle loi de conservation dont l'étude générale reste encore ouverte pour comprendre la formation des zones d'hyperbolicité et de parabolicité. A titre d'exemple, l'étude précédente montre que pour un choix d'un u_0 qui change de signe en restant positif localement autour de -1 et de 1, la zone où u_0 est négatif est hors d'influence.

Pour le problème autonome, on parvient toutefois à présenter quelques résultats et des illustrations en dimension un d'espace pour des topographies initiales simples. Ces illustrations semblent valider la conjecture suivante : lorsque u_0 change de signe, existe-t-il un ensemble $\omega\subset Q$ tel que $u=u_0$ dans $Q\backslash\omega$ et u est solution de l'équation de la chaleur dans ω ? La frontière libre $\partial\omega\cap Q$ est-elle caractérisée, lorsque l'on note $\tilde{u}=u_{|\omega}$, par la double condition de type Rankine–Hugoniot : $\tilde{u}_{|\partial\omega\cap Q}=u_0$ et $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}_{|\partial\omega\cap Q}=0$?

On retrouve sous une forme généralisée la problématique du problème de Bernoulli comme la présente par exemple Beurling dans [3].

Remerciements

Cette étude trouve son origine dans une convention scientifique entre l'université de Pau et l'Institut Français du Pétrole (où a été élaborée la modélisation). L'auteur remercie MM. D. Granjeon et R. Masson pour les nombreuses informations communiquées sur le sujet et les Pr. S.N. Antontsev et G. Gagneux pour leur aide significative dans ce travail.

Références

[1] S.N. Antontsev, G. Gagneux, G. Vallet, Analyse mathématique d'un modèle d'asservissement stratigraphique. Approche gravitationnelle d'un processus de sédimentation sous une contrainte d'érosion maximale, Publication interne du Laboratoire de Mathématiques Appliquées n° 2001/23, Pau, 2001.

[2] S.N. Antontsev, G. Gagneux, G. Vallet, On some stratigraphic control problems, Prikl. Mekh. Tekhn. Fis. et J. Appl. Mech. Techn. Phys., à paraître.

[3] A. Beurling, On free-boundary problems for the Laplace equation, Sem. on Analytic Functions Inst. Adv. Stud. Princeton 1 (1957) 248–263.

[4] G. Gagneux, G. Vallet, Sur des problèmes d'asservissements stratigraphiques, ESAIM: Control Optim. Calc. Var., A tribute to Jacques-Louis Lions 8 (2002) 715–739.

[5] Ph. Bénilan, M.G. Crandall, A. Pazy, Bonnes solutions d'un problème d'évolution semi-linéaire, C. R. Acad. Sci. Paris 306 (1) (1988) 527–530.

[6] G. Duvaut, J.-L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.

[7] R. Eymard, T. Gallouët, D. Granjeon, R. Masson, Q.H. Tran, Multi-lithology stratigraphic model under maximum erosion rate constraint, Int. J. Numer. Methods Ingrg., à paraître.

[8] J.-L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[9] Th. Gallouët, Equations satisfaites par des limites de solutions approchées, in: Canum2002, conférences plénières, 2002, pp. 87–96.

[10] D. Granjeon, Q. Huy Tran, R. Masson, R. Glowinski, Modèle stratigraphique multilithologique sous contrainte de taux d'érosion maximum, Institut Français du Pétrole, 2000.

[11] Y. Mualem, G. Dagan, Dependent domain model of capillary hysteresis, Water Resources Res. 11 (3) (1975) 452–460.

[12] A. Poulovassilis, E.C. Childs, The hysteresis of pore water: the non-independence of domains, Soil Sci. 112 (5) (1971) 301–312.