Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 249–252
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équation aux dérivées partielles

Non unicité des solutions bornées pour un champ de vecteurs *BV* en dehors d'un hyperplan

Nicolas Depauw

Mathématiques, faculté des sciences, 2, rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 Nantes cedex 03, France

Reçu le 26 juin 2003 ; accepté le 1er juillet 2003

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Nous présentons ici un exemple de champ de vecteurs plan dépendant du temps, borné à divergence nulle, et une solution non nulle bornée du problème de Cauchy homogène pour l'équation de transport associée. ***Pour citer cet article : N. Depauw, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Non uniqueness of bounded solutions for some *BV* outside a hyperplane vector field. We present here an example of a plane time-dependent bounded divergence-free vector field and a bounded non-zero solution of the homogeneous Cauchy problem for the associated transport equation. ***To cite this article: N. Depauw, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

1. Introduction

On considère un champ de vecteurs $a:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ borné à divergence nulle. On se pose la question de l'unicité des solutions $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ bornées de l'équation de transport

$$\partial_t u + \partial_x\cdot(au) = 0 \tag{T}$$

avec la condition de Cauchy $u(t,x)=0$ pour $t=0$.

Di Perna et Lions [5] ont montré que si les dérivées de a sont localement intégrables (i.e., $a\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$) alors u est nulle (donc unique). Colombini et Lerner [2] ont montré que si u est positive alors elle est nulle. Ils ont étendu l'argument de [5] au cas ou les dérivées de a sont des mesures (i.e., $a\in BV_{\mathrm{loc}}$) et u est continue. Plus récemment, ils ont montré que pour u seulement bornée, on a encore l'unicité si a est *conormal BV* hors d'un fermé E de mesure de Hausdorff (de codimension 1) nulle : $\mathcal{H}^d(E)=0$.

On propose ici un exemple de champ de vecteurs a conormal *BV* hors de $\{0\}\times\mathbb{R}^d$ et une solution u bornée non nulle de (T), nulle sur $\{t<0\}$.

Adresse e-mail : nicolas.depauw@math.univ-nantes.fr (N. Depauw).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00330-3

2. Le champ a

L'esprit de la construction est proche d'un exemple dû à Aizenman [1], mais plus explicite. Signalons au passage que Colombini et Rauch ont revisité en détail l'exemple d'Aizenman dans [4]. Nous donnons d'abord le principe général de la construction et les estimations qui en découlent. Puis nous donnons les détails précis, et en même temps nous calculons le flot.

On pose $a(t,x) := 0$ pour $t < 0$ ou $t > 1$, et $a(t,x) := b(2^j x)$ pour $t \in I_j := 2^{-j}(\frac{1}{2}, 1)$ avec $j \in \mathbb{N}$. Le champ $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est choisi à divergence nulle, $\mathbb{Z}^d$-périodique : $b(x+k) = b(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $k \in \mathbb{Z}^d$, et dans $BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. On note $Q := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ le cube unité centré en 0 et $\|m\|_{M(\overline{Q})}$ la variation totale d'une mesure de Radon m sur $\overline{Q} := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$. Alors on obtient

$$
\begin{aligned}
& \|a\|_{L^\infty} = \|b\|_{L^\infty}, \\
\forall_{\mathrm{pp}} t \in I_j, \quad & \|a(t)\|_{L^1(Q)} = 2^{-jd}\|b\|_{L^1(2^j Q)} = \|b\|_{L^1(Q)}\ ; \\
\forall_{\mathrm{pp}} t \in I_j, \quad & 2^j\|\partial_x b\|_{M(Q)} \leqslant \|\partial_x a(t)\|_{M(\overline{Q})} \leqslant 2^j\|\partial_x b\|_{M(\overline{Q})}\ ; \\
& \|\partial_{t,x} a\|_{M(\bar{I}_j \times \overline{Q})} \leqslant B := \frac{1}{2}\|\partial_x b\|_{M(\overline{Q})} + 2\|b\|_{L^1(Q)}, \\
& \|\partial_{t,x} a\|_{M(I_j \times \overline{Q})} \geqslant B' := \frac{1}{2}\|\partial_x b\|_{M(Q)}.
\end{aligned}
$$

Les deux dernières lignes assurent que X est à coefficient dans $BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^d)$ et que, quand $t = 2^{-j}$ tend vers 0, $\|\partial_{t,x} a\|_{M([t,1]\times\overline{Q})}$ est majoré par $-B\ln_2(t)$ et minorée par $-B'\ln_2(t)$.

À partir de maintenant, on fixe $d = 2$. Notons $\Lambda := \mathbb{Z}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ le réseau engendré par les coins de Q, et

$$
\begin{aligned}
b(x) &:= \sum_{k\in\Lambda} c(x-k), \\
c &:= \nabla^\perp V, \\
V(x) &:= 2\left[\min\left(\frac{1}{4}, \max\bigl(|x_1|, |x_2|\bigr)\right)\right]^2.
\end{aligned}
$$

Le champ $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est $L^\infty \cap BV$. En effet $c(x) = (-4x_2, 0)$ sur $|x_1| < |x_2| < \frac{1}{4}$ et $c(x) = (0, 4x_1)$ sur $|x_2| < |x_1| < \frac{1}{4}$ et son support est $\frac{1}{2}\overline{Q}$. Sa divergence est nulle puisque c'est l'orthogonal d'un gradient. On retrouve cela en remarquant qu'il est affine par morceaux sur des triangles avec continuité de la composante normale sur les bords. Sans perdre en généralité, on définit ponctuellement $c = 0$ sur le bord $\{\max(|x_1|, |x_2|) = \frac{1}{4}\}$ du support.

En coordonnées polaires *carrées* (r, θ), où $r = 2\max(|x_1|, |x_2|)$ et θ représente l'abscisse curviligne du point $\frac{1}{r}x$ le long du carré $\partial Q = \{r = 1\}$ (dans $\mathbb{R}/4\mathbb{Z}$ et compté à partir du point $(\frac{1}{2}, 0)$), le flot au temps t s'écrit $(r,\theta) \mapsto (r, \theta + 2t)$ si $r < \frac{1}{2}$ et $(r,\theta) \mapsto (r,\theta)$ si $r \geqslant \frac{1}{2}$. En effet, le champ est autonome, 1-homogène dans $\frac{1}{2}Q$ et quand on se rapproche par l'intérieur du bord de $\frac{1}{2}Q$, qui est de longueur 2, la vitesse $|c|$ tend vers 1.

Le flot au temps $\frac{1}{2}$ de ce champ autonome vaut

- la rotation d'angle $\pi/2$ sur le carré $\frac{1}{2}Q$;
- l'identité hors de $\frac{1}{2}Q$.

Revenons à b, en remarquant que les carrés $k + \frac{1}{2}Q$, k décrivant Λ, sont disjoints et se touchent par leurs coins, comme les cases noires d'un damier. On peut donc définir son flot, à partir de celui de c.

Alors le flot au temps $\frac{1}{2}$ de $b(x)$ vaut

– la rotation de centre k et d'angle $\pi/2$ sur le carré $k + \frac{1}{2}Q$, k décrivant Λ ;
– l'identité hors de $\bigcup_{k\in\Lambda}(k + \frac{1}{2}Q)$.

On peut maintenant vérifier qu'en dehors de $\Sigma := \{t = 0\}$, a est C^1 par morceaux, les morceaux étant des polyèdres cylindriques à base triangulaire. Donc a y est conormal BV au sens de [3]. Mais Σ est de mesure $\mathcal{H}^d$ non nulle, mais cependant localement finie.

On définit le flot de a pour les temps positifs en raccordant les flots des champs $x \mapsto a(t,x) = b(2^j x)$ sur $t \in I_j$ et le flot trivial (du champs nul) sur $t > 1$. Comme a n'est pas autonome, on obtient ainsi une fonction $\Psi : \mathbb{R} \times D \to D$ avec $D := \{t > 0\} \times \mathbb{R}^2$.

Pour tout $(t,x) \in D$, l'application $s \mapsto (\tau(s), \xi(s)) := \Psi(s,(t,x))$ (définie pour $s > -t$) vérifie $\tau(s) = t + s$ et $\xi(s) = x + \int_0^s a(\tau(s'), \xi(s'))\,\mathrm{d}s'$. D'une part $\|\xi\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \|a\|_{L^\infty}$ et on peut donc la prolonger à $s = -t$. D'autre part si ϕ est $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ alors $s \mapsto \phi(\Psi(s,(t,x)))$ est Lipschitz et pour presque tout $s > -t$ sa dérivée vaut $(\partial_t\phi + a \cdot \partial_x\phi)(\Psi(s,(t,x)))$.

Pour tout $s > -t$, $\Psi(s,\cdot)$ induit une bijection de $\{t\} \times \mathbb{R}^2$ dans $\{t+s\} \times \mathbb{R}^2$ qui préserve la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$: pour ϕ dans $L^1(\{t+s\} \times \mathbb{R}^2)$, on a l'égalité $\int_{\mathbb{R}^2} \phi(\Psi(s,(t,y)))\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t+s,x)\,\mathrm{d}x$.

3. La fonction u

On définit des fonctions $\mathbb{Z}^2$-périodiques $u_j \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ par $u_0(x) := \operatorname{sign}(x_1x_2)$ sur Q et $u_j(x) := (-1)^j u_0(2^j x)$. On définit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ par $u(t,x) = u_0(y)$ si $(t,x) = \Psi(s,(1,y))$ pour $t > 0$ et par $u(t,x) = 0$ pour $t < 0$.

Puisque le flot au temps $\frac{1}{2}$ de b transporte u_1 sur u_0, la construction assure que $u(2^{-j},x) = u_j(x)$. L'application $t \mapsto u(t,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeur dans L^∞ faible-$*$. En effet sur $t > 0$ cela découle de la définition de u à l'aide de u_0 par Ψ et de la conservation de la mesure : l'application qui à t associe

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(t,x)\phi(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} u_0(y)\phi\bigl(\Psi\bigl(t-1,(1,y)\bigr)\bigr)\,\mathrm{d}y$$

est continue par convergence dominée si $\phi \in C_c(\mathbb{R}^2)$ est indépendante de t, et même, par densité, si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Par un raisonnement semblable, les u_j tendent vers 0 dans L^∞ faible-$*$ assurant la continuité en $t = 0$.

Justifions que u est solution faible de (T) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ en testant contre une fonction $\phi \in C_c^1$: on veut calculer

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^2} -(\partial_t\phi + \partial_x\phi \cdot a)u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

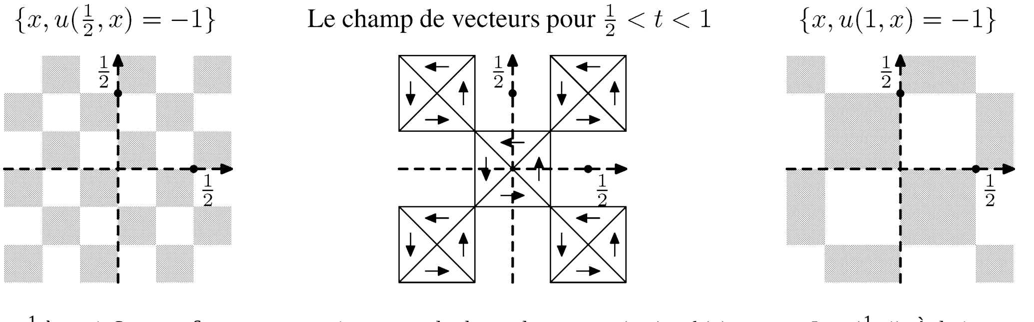

Fig. 1. De $t = \frac{1}{2}$ à $t = 1$. Sur cette figure, on peut voir au centre le champ de vecteur $a(t,x) = b(x)$ pour $t \in I_0 = (\frac{1}{2}, 1)$. À droite on a représenté en niveau de gris la fonction u à l'instant $t = 1$: en gris la zone où elle vaut -1 et en blanc celle où elle vaut $+1$. À gauche, on a représenté de la même façon u à l'instant $t = \frac{1}{2}$.

L'intégrale sur $t < 0$ est nulle et compte tenu des bornes sur u, a, les dérivées et le support de ϕ, il suffit de calculer la limite, quand $\tau \to 0$ de l'intégrale (en t) sur $\{t > \tau\}$. Pour exploiter la définition de u et les propriétés de Ψ notons $(t, \xi(t, y)) = \Psi(t-1, (1, y))$. Alors l'intégrale à calculer vaut

$$\begin{aligned}\int_{t>\tau}\int_{\mathbb{R}^2} -(\partial_t\phi + a\cdot\partial_x\phi)\big(t,\xi(t,y)\big)u_0(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}^2}\bigg(-\int_{t>\tau}\partial_t\big(\phi\big(t,\xi(t,y)\big)\big)\,\mathrm{d}t\bigg)u_0(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\phi\big(\tau,\xi(\tau,y)\big)u_0(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2}\phi(\tau,x)u(\tau,x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Cela tend vers 0 puisque u tend vers 0 dans L^∞ faible-$*$ et ϕ est continue en temps à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.

4. Conclusion

On a obtenu ici un exemple explicite qui contredit une conjecture trop naïve selon laquelle une borne essentielle sur les coefficients du champ et sur sa divergence impliqueraient l'unicité des solutions bornées de l'équation de transport. Mais l'exemple ne contredit cependant pas la conjecture plus raisonnable où l'on suppose en plus le champ *BV*. Notons, par rapport au théorème d'unicité de Colombini et Lerner [3] que notre champ est bien conormal *BV* en dehors de $t = 0$ qui est de mesure de Hausdorff (de codimension 1) localement finie, mais pas nulle.

Remerciements

Je remercie Nicolas Lerner pour l'intérêt qu'il a porté à cet exemple.

Références

[1] M. Aizenman, On vector fields as generators of flows: a counterexample to Nelson's conjecture, Ann. of Math. 107 (2) (1978) 287–296.
[2] F. Colombini, N. Lerner, Uniqueness of continuous solutions for *BV* vector fields, Duke Math. J. 111 (2) (2002) 357–384.
[3] F. Colombini, N. Lerner, Uniqueness of L^∞ solutions for a class of conormal *BV* vector fields, Preprint de Rennes, 2003.
[4] F. Colombini, J. Rauch, Unicity and nonunicity for nonsmooth divergence free transport, Séminaire X-EDP 2002-2003, École Polytechnique, in preparation.
[5] R. Di Perna, P.-L. Lions, Ordinary differential equations transport theory and Sobolev spaces, Invent. Math. 98 (1989) 511–547.