Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE @ DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 1015–1020
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Systèmes dynamiques

Actions toriques et groupes d'automorphismes de singularités des systèmes dynamiques intégrables

Nguyen Tien Zung

Laboratoire Emile Picard, UMR 5580 CNRS, UFR MIG, Université Toulouse III, France

Reçu et accepté le 15 avril 2003

Présenté par Bernard Malgrange

Résumé

Nous montrons qu'autour de chaque orbite singulière « de type fini » d'un système dynamique réel analytique intégrable (hamiltonien ou non) il existe une action torique analytique qui préserve le système et qui est transitive sur cette orbite. Nous montrons aussi que le groupe de germes d'automorphismes du système au voisinage d'une telle orbite est essentiellement abélien. ***Pour citer cet article : N.T. Zung, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

Torus actions and automorphism groups of singularities of integrable dynamical systems. We show that in the neighborhood of each "finite type" singular orbit of a real analytic integrable dynamical system (Hamiltonian or not) there is a real analytic torus action which preserves the system and which is transitive on this orbit. We also show that the local automorphism group of the system near such an orbit is essentially Abelian. ***To cite this article: N.T. Zung, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

Let $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)$ be a p-tuple of commuting analytic vector fields on a real analytic manifold M^m of dimension $m = p + q$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 0$, and let $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_q)$ be a q-tuple of analytic common first integrals for the vector fields of $\mathbf{X}$: $X_i(F_j) = 0$, $\forall i, j$. We suppose that $X_1 \wedge \cdots \wedge X_p \neq 0$ and $\mathrm{d}F_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}F_q \neq 0$ almost everywhere. Then $\mathcal{S} = (\mathbf{X}, \mathbf{F})$ is called an *analytic integrable dynamical system* of bi-degree (p, q) of freedom, see, e.g., [2,3,7,12,13]. In the Hamiltonian case, when there is an analytic Poisson structure (maybe degenerate) on M^m, we suppose that the vector fields $X_1, \ldots, X_p$ are also Hamiltonian.

The classical Mineur–Liouville theorem [6] (often called Arnold–Liouville theorem [1]) and its more or less straightforward generalizations describe the local behavior of an integrable system in the regular region, under some reasonable hypothesis. Here we study singular points, i.e., points $x \in M^m$ such that $X_1 \wedge \cdots \wedge X_p(x) = 0$ or

Adresse e-mail : tienzung@picard.ups-tlse.fr (N. Tien Zung).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00242-5

$\mathrm{d}F_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}F_q(x) = 0$. The vector fields $X_1, \ldots, X_p$ generate an infinitesimal action of $\mathbb{R}^n$ on M^m. Let $O \subset M^m$ be a singular orbit of dimension r of this action, $0 \leqslant r < p$. We suppose that O is a compact submanifold of M^m. Then O is a torus of dimension r. We view $\mathbf{F}$ as a map from M^m to $\mathbb{R}^q$. It is constant on the orbits of the infinitesimal action of $\mathbb{R}^p$. Denote by $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^q$ the value of $\mathbf{F}$ on O, and N the connected component of $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{c})$ which contains O. We are interested in the behavior of the system $\mathcal{S} = (\mathbf{X}, \mathbf{F})$ in a neighborhood of O or N. In particular, we want to find a normal form in the sense of Birkhoff–Poincaré, and a torus action of $\mathbb{T}^r$ which preserves the system and which is transitive on O. In the regular Hamiltonian case, the existence of such a Hamiltonian torus action is the essential point in the classical Liouville–Mineur theorem on the existence of action-angle variables. In the singular case, this action would allow us to do reduction, and to find partial action-angle variables. This torus action is very important for the singular Bohr–Sommerfeld rule in the quantization of integrable systems, see, e.g., [4]. It is also indispensable for the study of global aspects of integrable systems, see, e.g., [10].

In this Note, we show the existence of this torus action under a weak condition, called the *finite type condition*. To formulate this condition, denote by $M_{\mathbb{C}}$ a small open complexification of M^m on which the complexification $\mathbf{X}_{\mathbb{C}},\ \mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ of $\mathbf{X}$ and $\mathbf{F}$ exists. Denote by $N_{\mathbb{C}}$ a connected component of $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{c})$ which contains N.

Definition 1. With the above notations, the singular orbit O is called of *finite type* if there is only a finite number of orbits of the infinitesimal action of $\mathbb{C}^p$ in $N_{\mathbb{C}}$, and $N_{\mathbb{C}}$ contains a regular point of the map $\mathbf{F}$.

Theorem 2. *With the above notations and assumptions, if O is a finite type singular orbit of dimension r, then there is a real analytic torus action of $\mathbb{T}^r$ in a neighborhood of O which preserves the integrable system $\mathcal{S}$ and which is transitive on O. If moreover N is compact, then this torus action exists in a neighborhood of N. In the Hamiltonian case this torus action also preserves the Poisson structure.*

Denote by G_O the local automorphism group of the integrable system $\mathcal{S}$ at O, i.e., the group of germs of local analytic automorphisms of $\mathcal{S}$ in the vicinity of O (which preserve the Poisson structure in the Hamiltonian case). Denote by G_O^0 the subgroup of G_O consisting of elements of the type g_Z^1, where Z is a analytic vector field in a neighborhood of O which preserves the system and g_Z^1 is the time-1 flow of Z. Our second result says that G_O is essentially Abelian if O is of finite type:

Theorem 3. *If O be a finite type singularity as above, then G_O^0 is an Abelian normal subgroup of G_O, and G_O/G_O^0 is a finite group.*

The above two theorems are very closely related. In fact, if we have an automorphism of an integrable system of bi-degree (p, q), then by suspension we can create an integrable system of bi-degree $(p+1, q)$, or of bi-degree $(p+1, q+1)$ in the Hamiltonian case. The existence of the torus action for the later system is then directly related to the nature of the automorphism of the former system. Partial cases of Theorem 2 (namely, the case of degenerate singularities of corank 1 and the case of nondegenerate singularities of integrable Hamiltonian systems on symplectic manifolds) have been obtained earlier in [9,8]. Theorem 2, together with our earlier results [11,12] on Poincaré–Birkhoff normalization for singular points of integrable systems, imply the existence of a local analytic Poincaré–Birkhoff normalization for any singular orbit of finite type of an analytic integrable dynamical system.

1. Introduction

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)$ un p-tuple de champs de vecteurs analytiques deux-à-deux commutants sur une variété réelle analytique régulière M^m de dimension $m = p + q,\ \ p \geqslant 1,\ \ q \geqslant 0$. Soit $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_q)$ un q-tuple d'intégrales premières analytiques communes pour les champs de $\mathbf{X}$: $X_i(F_j) = 0,\ \ \forall i, j$. On suppose que $X_1 \wedge \cdots \wedge X_p \neq 0$ et $\mathrm{d}F_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}F_q \neq 0$ presque partout sur M^m. Alors $\mathcal{S} = (\mathbf{X}, \mathbf{F})$ est appelé un *système dynamique analytique intégrable* de bi-degré (p, q) de liberté, voir, e.g., [2,3,7,12,13]. Dans le cas hamiltonien, quand il y a une structure de Poisson analytique (peut-être dégénérée) sur M^m, on demande que les champs $X_1, \ldots, X_p$ soient aussi hamiltoniens.

Le théorème classique de Mineur et Liouville [6] (appelé souvent le théorème d'Arnold et Liouville [1]) et ses généralisations plus ou moins évidentes décrivent le comportement local d'un système intégrable dans la région régulière sous quelques hypothèses raisonnables. Ici, nous étudions les points singuliers, c'est à dire les points $x \in M^m$ tels que $X_1 \wedge \cdots \wedge X_p(x) = 0$ ou $\mathrm{d}F_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}F_q(x) = 0$. Les champs $X_1, \ldots, X_p$ engendrent une action infinitésimale de $\mathbb{R}^n$ sur M^m. Soit $O \subset M^m$ une orbite singulière de dimension r de cette action, $0 \leqslant r < p$. On suppose que O est une sous-variété compacte de M^m. Alors O est un quotient compact de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire un tore de dimension r. On regarde $\mathbf{F}$ comme une application de M^m dans $\mathbb{R}^q$. Elle est constante sur les orbites de l'action infinitésimale de $\mathbb{R}^p$. Notons $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^q$ la valeur de $\mathbf{F}$ sur O, et N la composante connexe de $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{c})$ qui contient O. Nous nous intéressons au comportement du système $\mathcal{S} = (\mathbf{X}, \mathbf{F})$ au voisinage de O ou de N. En particulier, nous cherchons une forme normale à la Birkhoff–Poincaré, et une action torique de $\mathbb{T}^r$ qui préserve le système et qui est transitive sur O. Dans le cas régulier hamiltonien, l'existence d'une telle action torique hamiltonienne est le point essentiel du théorème classique de Liouville–Mineur sur l'existence de variables action-angle. Dans le cas singulier, cette action nous permet de faire de la réduction, et de trouver des variables action-angle partielles (le cas hamiltonien). Elle est très importante pour la règle de Bohr–Sommerfeld singulière dans la quantification de systèmes intégrables, voir, e.g., [4]. Elle est aussi indispensable pour les aspects globaux des systèmes intégrables, voir, e.g., [10].

Dans [8] et [9] nous avons montré l'existence de cette action pour les singularités nondégénérées, et les singularités dégénérées de corang un, de systèmes hamiltoniens intégrables sur les variétés symplectiques. Dans [10] il a été conjecturé que cette action torique doit exister aussi pour les singularités dégénérées « génériques ». Dans cette Note, nous donnons une réponse positive à cette conjecture (dans un cadre plus général), en montrant l'existence de cette action torique sous une condition assez faible et facile à vérifier, qui s'appelle la condition de *type fini*. Pour formuler cette condition, notons $M^m_{\mathbb{C}}$ une petite complexification ouverte de M^m sur laquelle la complexification $\mathbf{X}_{\mathbb{C}}$, $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{F}$ existe. Notons $N_{\mathbb{C}}$ la composante connexe de $\mathbf{F}^{-1}_{\mathbb{C}}(\mathbf{c})$ qui contient N.

Définition 1.1. Avec les notations ci-dessus, l'orbite singulière O est dite de type fini s'il y a seulement un nombre fini d'orbites de l'action infinitésimale de $\mathbb{C}^p$ dans $N_{\mathbb{C}}$, et $N_{\mathbb{C}}$ contient des points réguliers pour l'application $\mathbf{F}$.

Nous conjecturons que toutes les singularités des systèmes « algébriquement intégrables » sont de type fini. Remarquons que si O est une orbite singulière de type fini alors $N_{\mathbb{C}}$ est de dimension p, et il existe une orbite régulière dans $N_{\mathbb{C}}$ (c'est à dire une orbite de dimension p dont les points sont réguliers pour l'application $\mathbf{F}$) qui contient O dans son adhérence.

Théorème 1.2. *Avec les notations ci-dessus, si O est une orbite singulière de type fini alors il existe une action torique réelle analytique du tore $\mathbb{T}^r$ de dimension r au voisinage de O qui préserve le système $\mathcal{S} = (\mathbf{X}, \mathbf{F})$ et qui est transitive sur O. Si de plus N est compact, alors cette action torique existe dans un voisinage de N. Dans le cas hamiltonien, quand $X_1, \ldots, X_p$ sont des champs hamiltoniens par rapport à une structure de Poisson analytique, cette action torique préserve aussi la structure de Poisson.*

Dans [11,12], nous avons montré l'existence d'une action torique autour de chaque point singulier d'un système intégrable $\mathcal{S}$, qui fixe ce point et dont la linéarisation donne une normalisation locale analytique de Poincaré–Birkhoff en ce point. Il sera évident que cette deuxième action torique (autour de chaque point de O) commute avec l'action torique transitive donnée par le Théorème 1.2, et ensemble elles engendrent une « grande » action torique au voisinage complexifié de O dans $M^m_{\mathbb{C}}$. On peut dire que la linéarisation de cette grande action torique donne une normalisation analytique de Poincaré–Birkhoff du système intégrable $\mathcal{S}$ au voisinage de l'orbite O.

Le deuxième résultat principal de cette Note est le suivant :

Théorème 1.3. *Soit O une orbite singulière de type fini d'un système dynamique analytique intégrable $\mathcal{S}$, avec les notations ci-dessus. Notons G_O le groupe de germes d'automorphismes analytiques locaux de $\mathcal{S}$ au voisinage de O (qui préservent la structure de Poisson dans le cas hamiltonien). Notons G_O^0 le sous-groupe de G_O qui est formé des éléments de type g_Z^1, où Z est un champ de vecteurs analytique au voisinage de O qui préserve le système et g_Z^1 est le temps-1 flot de Z. Alors G_O^0 est un sous-groupe abélien normal de G_O, et G_O/G_O^0 est un groupe fini.*

Pour montrer le Théorème 1.2, nous allons d'abord caractériser les actions toriques via les cycles affines sur les orbites de l'action infinitésimale de $\mathbb{C}^p$. Et puis nous montrons l'existence de ces cycles affines pour les singularités de type fini par une méthode de récurrence. La preuve du Théorème 1.3 est une modification de la preuve du Théorème 1.2, où il faut simplement remplacer les mots « cycle affine » par les mots « segment affine ». En fait, si on a un automorphisme pour un système intégrable de bi-degré (p, q) de liberté, alors par suspension on peut créer un système intégrable de bi-degré $(p + 1, q)$, ou de bi-degré $(p + 1, q + 1)$ dans le cas hamiltonien, et cette suspension relie le Théorème 1.3 avec le Théorème 1.2.

2. Actions toriques et cycles affines

Rappelons le lemme évident suivant :

Lemme 2.1. *Si Z est un champ de vecteurs analytique (réel analytique ou holomorphe) qui préserve le système $(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ dans un ouvert (réel ou complexe), alors au voisinage de chaque point régulier de cet ouvert on peut écrire Z de façon unique sous forme $Z = \sum_{i=1}^p a_i(\mathbf{F})X_i$, où les a_i sont des fonctions analytiques de q variables. Si Z' est un autre champ de vecteurs analytique qui préserve le système $(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ dans le même ouvert alors Z' commute avec Z : $[Z, Z'] = 0$.*

En particulier, toutes les actions toriques réelles analytiques qui préservent le système $\mathcal{S}$ (et la structure de Poisson dans le cas hamiltonien) au voisinage d'une orbite singulière O commutent deux-à-deux et il existe parmi eux la plus grande action torique effective qui est libre presque partout. On va noter cette action torique et le tore correspondant par $\mathbb{T}_O$. Si on regarde les actions des tores réels dans un voisinage complexe de O (qui préservent la structure complexe), on aura une autre action torique maximale effective, notée $\mathbb{T}_{O,\mathbb{C}}$. Le tore $\mathbb{T}_O$ est un sous-tore de $\mathbb{T}_{O,\mathbb{C}}$.

Soit $Q_\mathbb{C}$ une orbite de l'action infinitésimale de $\mathbb{C}^p$ dans $N_\mathbb{C}$.

L'action infinitésimale de $\mathbb{C}^p$ induit sur $Q_\mathbb{C}$ une structure affine plate, et on peut parler des géodésiques (par rapport à cette structure affine) sur $Q_\mathbb{C}$. Un lacet γ sur $Q_\mathbb{C}$ est appelé un *cycle affine* s'il peut être représenté par une géodésique fermée sur Q. Dans ce cas il existe des nombres complexes $a_1, \ldots, a_p$ tels que l'une des orbites du champ $\sum_{i=1}^p a_i X_i$ pour le temps réel $t \in [0, 1]$ soit fermée (périodique de période 1) sur $Q_\mathbb{C}$ et donne ce cycle. Deux cycles affines sont dits *équivalents* s'ils peuvent être donnés par un même champ $\sum_{i=1}^p a_i X_i$. Un cycle affine γ est dit *réel* (même s'il ne vit pas sur M^m) si les nombres a_i peuvent être choisis réels. Une famille de k cycles affines $\gamma^1, \ldots, \gamma^k$ sur $Q_\mathbb{C}$ est dite *linéairement indépendante* si ces cycles ne peuvent pas être donnés par des champs $\sum_{i=1}^p a_i^1 X_i, \ldots, \sum_{i=1}^p a_i^k X_i$ tels que $(a_i^1), \ldots, (a_i^k) \in \mathbb{C}^p$ sont k vecteurs linéairement dépendants dans $\mathbb{C}^p$. Un cycle affine γ sur $Q_\mathbb{C}$ est dit *admissible* si on peut choisir les nombres a_i tels que $\sum_{i=1}^p a_i X_i$ donne γ, et que pour tout point dans un voisinage complexe connexe de O qui contient γ on peut intégrer le champ $\sum_{i=1}^p a_i X_i$ pour l'intervalle réel $[0, 1]$ du temps et pour la condition initiale en ce point.

Maintenant, soit $Q_\mathbb{C}$ une orbite régulière dont l'adhérence contient O. L'existence des cycles affines admissibles sur $Q_\mathbb{C}$ est alors reliée à l'existence des actions toriques autour de O et N :

Lemme 2.2. *Soit $Q_\mathbb{C}$ une orbite régulière dans $N_\mathbb{C}$ dont l'adhérence contient O. Alors pour chaque cycle affine admissible non-trivial γ sur $Q_\mathbb{C}$ il existe un champ de vecteur analytique unique de type $Z = \sum g_i(\mathbf{F})X_i$ (où* *les $g_i(\mathbf{F})$ sont des fonctions holomorphes locales de q variables) qui donne ce cycle sur $Q_{\mathbb{C}}$ et dont le flot est périodique de période 1 dans un voisinage complexe de O. Cette action est réelle (c'est à dire que les fonctions $g_i(\mathbf{F})$ sont réelles analytiques) si et seulement si le cycle γ est réel. En particulier, la dimension de l'action torique complexe (resp., réelle) maximale $\mathbb{T}_{O,\mathbb{C}}$ (resp., $\mathbb{T}_O$) est égale au nombre maximal de cycles affines (resp., cycles affines réels) admissibles linéairement indépendants sur $Q_{\mathbb{C}}$. Si N est compact alors $\mathbb{T}_O$ est (isomorphe à) l'action torique réelle analytique maximale qui préserve le système au voisinage de N.*

La preuve (assez directe) du Lemme 2.2 est basée sur le théorème des fonctions implicites holomorphes (pour trouver les fonctions $g_i(\mathbf{F})$), le Lemme 2.1, et la conjugaison complexe (pour traiter les actions toriques correspondant aux cycles réels).

3. L'existence de cycles affines

Le lemme clé qui nous permettra de construire les actions toriques est le suivant :

Lemme 3.1. *Supposons que l'orbite singulière O est de type fini, et soit $Q_{\mathbb{C}}$ une orbite régulière dans $N_{\mathbb{C}}$ dont l'adhérence contient O. Soit γ un cycle affine sur O. Alors il existe un cycle affine admissible γ_Q sur $Q_{\mathbb{C}}$ dont la limite à O est équivalente à un multiple entier positif de γ, c'est à dire qu'il existe des nombres complexes $a_1, \dots, a_p$ tels que $\sum a_i X_i$ donne à la fois le cycle γ_Q sur $Q_{\mathbb{C}}$ et un multiple entier positif du cycle γ sur O.*

Remarque. A-fortiori, le Théorème 1.2 impliquera que les nombres $a_1, \dots, a_p$ ci-dessus peuvent être choisis réels.

Démonstration. Il existe une chaine maximale d'orbites $O_1 = O_{\mathbb{C}}$ $(O \subset O_{\mathbb{C}}), O_2, \dots, O_k = Q_{\mathbb{C}}$ de l'action infinitésimale de $\mathbb{C}^p$ dans $N_{\mathbb{C}}$ telles que O_i est dans l'adhérence de O_{i+1} et $O_i \neq O_{i+1}$, $k \geqslant 2$. Nous allons montrer par récurrence qu'il existe sur chaque O_i un cycle affine admissible γ_i tel que la limite de γ_{i+1} à O_i est équivalente à un multiple entier positif de γ_i. Mettons $\gamma_1 = \gamma$ (il est clair que γ est admissible car il vit sur le tore réel compact O). Supposons que nous avons déjà trouvé γ_i, $i < k$, et cherchons γ_{i+1}. Soit x un point sur γ_i, et D un petit disque complexe qui contient x et qui est transverse à O_i. Soit Y l'intersection de O_{i+1} avec D. Comme O est de type fini et la chaine $O_1, \dots, O_k$ a été choisie maximale, $Y \cup \{x\}$ est un cône dont x est le sommet et l'intersection de Y avec le bord de D est la base, et cette base est compacte, lisse.

Notons $s = \dim O_i$ et $d = \dim Y = \dim O_{i+1} - \dim O_i$. On peut supposer que $X_{p-s+1} \wedge \cdots \wedge X_p(x) \neq 0$. Pour chaque $i \leqslant p - s + 1$, notons $\widehat{X}_i$ le champ de vecteurs sur Y qui est la projection de X_i par le flot de l'action locale de $\mathbb{C}^s$ engendré par $X_{p-s+1}, \dots, X_p$. Alors les champs $\widehat{X}_i$ commutent et engendrent une *structure de translation* sur Y (c'est à dire une structure affine plate dont les changements de cartes sont des translations). Rappelons qu'une région d'une variété affine est dite *convexe* si deux points quelconques de cette région peuvent être joints par une géodésique affine contenue dans cette région. Nous allons utiliser le lemme suivant, qui a un intérêt indépendant :

Lemme 3.2. *Il existe un nombre naturel $n(Y)$ qui dépend de Y et des sous-ensembles convexes $Y_1, \dots, Y_{n(Y)}$ de Y tels que $\bigcup_{j=1}^{n(Y)} Y_j \cup \{x\}$ est un voisinage de x dans $Y \cup \{x\}$.*

Par l'hypothèse de récurrence, on a des nombres complexes $a_1, \dots, a_p$ tels que $\sum a_i X_i$ donne γ_i et que le flot de temps réel $0 \leqslant t \leqslant 1$ de $\sum a_i X_i$ existe pour toute condition initiale dans un voisinage connexe de O qui contient γ_i. En appliquant le flot de temps 1 du champ $\sum a_i X_i$ sur Y, puis la projection locale par les champs $X_{p-s+1}, \dots, X_p$ sur Y, on obtient un difféomorphisme local de Y (près de x), appelé l'application de Poincaré de $\sum a_i X_i$ sur Y et notée ϕ. Cette application ϕ préserve la structure de translation de Y. Le Lemme 3.2 implique qu'il existe un nombre naturel n $(1 \leqslant n \leqslant n(Y))$ et un point $y \in Y$, aussi proche de x qu'on veut, tel que y et $\phi^n(y)$ (où ϕ^n et l'itération n fois de ϕ) sont deux points dans Y qui peuvent être joints par un segment géodésique de Y. On en déduit facilement qu'il existe des nombres complexes $b_1, \dots, b_d$ tels que le temps-1 flot du champ $\sum_{j=1}^{d} b_j \widehat{X}_j$ est égal à ϕ^n dans un voisinage de x dans $Y \cup \{x\}$. On peut supposer que $X_1(x) = \cdots = X_{p-s}(x) = 0$. Alors on vérifie que le champ $n(\sum_{i=1}^n a_i X_i) + \sum_{j=1}^d b_j X_j$ est périodique de période 1 dans un voisinage de γ_i dans $O_{i+1} \cup O_i$, il coincide avec $n(\sum_{i=1}^n a_i X_i)$ sur O_i, et il donnera un cycle affine γ_{i+1} sur O_{i+1} que nous cherchons. $\square$

Preuve du Lemme 3.2. On a supposé que $\widehat{X}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_d \neq 0$ sur Y. Ces champs donnent une métrique riemannienne plate sur Y pour laquelle ils sont orthonormés. Notons P un sous-ensemble linéaire par morceaux de dimension $d-1$ (où $d = \dim Y$) de Y qui est isotope à la base du cône $Y \cup \{x\}$. On peut supposer que P est fait d'un nombre fini de polyèdres convexes de dimension $d-1$ (ses faces), qu'on note $P_1, \ldots, P_l$. On note par α un d-tuple de nombres $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ avec $\alpha_i = \pm 1$ $\forall i$. On note par Q_i^α l'ensemble des points $y \in Y$ tels qu'il existe une géodésique tangente à un champ $\sum_{i=1}^d c_i \widehat{X}_i$ avec $c_i \alpha_i \geqslant 0$ $\forall i = 1, \ldots, d$, qui va de y à un point $z \in P_i$, et telle que la longueur de cette géodésique est égale à la distance de y à P (par rapport à la métrique riemannienne plate définie ci-dessus). On vérifie que ces ensembles Q_i^α sont convexes et leur union avec $\{x\}$ est un voisinage de x dans $Y \cup \{x\}$. On peut donc poser $n(Y) = l \times 2^d$. $\square$

4. Preuve des Théorèmes 1.2 et 1.3

Soit O une orbite singulière de type fini, et soit $Q_{\mathbb{C}}$ une orbite régulière dont l'adhérence contient O. Comme O est un tore de dimension r, il y a r cycles affines linéairement indépendants sur O. Appliquant le Lemme 3.1 nous obtenons r cycles affines admissibles linéairement indépendants sur $Q_{\mathbb{C}}$. Appliquant le Lemme 2.2 à ces cyles affines, nous obtenons une action de $\mathbb{T}^r$ dans un voisinage complexifié de O. Disons que cette action est engendrée par (le flot de temps réel de) r champs de vecteurs holomorphes $Z_1 = \sum_{i=1}^n g_{i1}(\mathbf{F}) X_i, \ldots, Z_r = \sum_{i=1}^n g_{ir}(\mathbf{F}) X_i$. Il est clair que cette action est transitive sur O. Il reste un petit problème : cette action n'est pas forcément réelle. Si elle n'est pas réelle, alors, comme notre système $\mathcal{S}$ est réel, la conjugaison complexe nous donne une autre action de $\mathbb{T}^r$, qui est engendrée par les champs $\overline{Z_1} := \sum_{i=1}^n \overline{g_{i1}}(\mathbf{F}) X_i, \ldots, \overline{Z}_r := \sum_{i=1}^n \overline{g_{ir}}(\mathbf{F}) X_i$, où $\overline{g_{ij}}$ sont des fonctions holomorphes définies par $\overline{g_{ij}}(z) = \overline{g_{ij}(\bar{z})}$. Le Lemme 2.1 montre que ces deux actions toriques commutent, ce qui implique que les champs analytiques réels $Z_1 + \overline{Z}_1, \ldots, Z_r + \overline{Z}_r$ engendrent aussi une action torique de dimension r. Comme nous avons $Z_i = \bar{Z}_i$ sur O, alors cette nouvelle action torique est transitive sur O. Dans le cas hamiltonien, la formule de Mineur [6] pour les variables action (appelée souvent la formule d'Arnold, voir aussi [5,11]) montre que notre action torique préserve la structure de Poisson. Le Théorème 1.2 est démontré. De façon similaire, le Théorème 1.3 est aussi une conséquence du Lemme 3.1 et sa preuve.

Références

[1] V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Second edition, in: Graduate Texts in Math., Vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1989, xvi + 508 pp.
[2] L. Bates, R. Cushman, Rep. Math. Phys. 44 (1–2) (1999) 29–35.
[3] O.I. Bogoyavlenskij, Comm. Math. Phys. 196 (1) (1998) 19–51.
[4] Y. Colin de Verdière, S. Vu-Ngoc, Singular Bohr–Sommerfeld rules for 2D integrable systems, math.AP/0005264, Ann. École Norm. Sup. 36 (1) (2003) 1–55.
[5] J.M. Françoise, in: Lecture Notes in Math., Vol. 1416, Springer, 1990, 105–138.
[6] H. Mineur, Sur les systèmes mécaniques dans lesquels figurent des parametres fonctions du temps. Etude des systèmes admettant n intégrales premières uniformes en involution. Extension à ces systèmes des conditions de quantification de Bohr–Sommerfeld, J. École Polytechnique, Sér. III 143ème année (1937) 173–191 et 237–270.
[7] A.S. Mischenko, A.T. Fomenko, Functional Anal. Appl. 12 (1978) 46–56.
[8] N.T. Zung, Compositio Math. 101 (2) (1996) 179–215.
[9] N.T. Zung, Comment. Math. Helv. 75 (2) (2000) 271–283.
[10] N.T. Zung, Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. II: Topological classification, math.DG/0010181, 2000, Compositio Math., to appear.
[11] N.T. Zung, Convergence versus integrability in Birkhoff normal form, math.DS/0104279, 2001.
[12] N.T. Zung, Math. Res. Lett. 9 (2–3) (2002) 217–228.
[13] N.T. Zung, Reduction and integrability, math.DS/0201087, 2002.