Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 907–912
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Estimation des résidus de l'amplitude de diffusion pour des perturbations de longue portée

Laurent Michel

Département de mathématiques appliquées, Université Bordeaux I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence, France

Reçu le 16 avril 2003 ; accepté le 22 avril 2003

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

On étudie le comportement semi-classique lorsque $h \to 0$ des résidus de l'amplitude de diffusion associée à un opérateur de Schrödinger $P(h) = -h^2\Delta + V(x)$ pour une perturbation de longue portée $V(x)$. Pour des résonances proches de l'axe réel et sous une hypothèse de séparation, on donne une estimation de chaque résidu en fonction du paramètre h et de la partie imaginaire de la résonance associée. ***Pour citer cet article : L. Michel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

Semi-classical estimate of the residues of the scattering amplitude for long-range perturbations. We study the semi-classical behavior when $h \to 0$, of the residues of the scattering amplitude associated to the Schrödinger operator $P(h) = -h^2\Delta + V(x)$ for long-range perturbations $V(x)$. For resonances close to the real axis and under a separation condition, we give an estimate of each residue in terms of the parameter h and the imaginary part of the resonance. ***To cite this article: L. Michel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

Consider the Schrödinger operator $P(h) = -h^2\Delta + V$, in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $0 < h \leqslant 1$. Assume that the potential $V(x)$ is a C^∞ smooth function and satisfies the following condition

Assumption (Hol$_\infty$). There exist $\theta_0 \in [0, \pi[$ and $R > 0$ such that the potential V extends holomorphically to the domain

$$D_{R,\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| > R,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant \tan\theta_0 |\operatorname{Re} z|\}$$

and

$$\exists \beta > 0,\ \exists C > 0,\ \forall x \in D_{R,\theta_o},\quad |V(x)| \leqslant C|x|^{-\beta}.$$

Adresse e-mail : lmichel@math.u-bordeaux.fr (L. Michel).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00219-X

It follows from Cauchy's formula that if (Hol_∞) is satisfied, then the potential V is long-range in the following sense:

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\quad \left|\partial_x^\alpha V(x)\right|\leqslant C_\alpha\left(1+|x|^2\right)^{-\frac{1}{2}(\rho+|\alpha|)},\quad \rho>0.$$

Under this assumption, we can define the scattering amplitude $f(\theta,\omega,\lambda,h)$ related to $P_0(h)=-h^2\Delta$ and $P(h)$, which is smooth in $(\theta,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1}\setminus\{\theta=\omega\}$. Moreover, for $\theta\neq\omega$, we know from [2] that the scattering amplitude has a meromorphic continuation from upper half plane to a conic neighborhood of the real axis, whose poles are the resonances of $P(h)$ defined by complex scaling (see [6]). We will denote by $\mathrm{Res}(P(h))$ the set of resonances of $P(h)$.

Now, we will formulate our statement on the resonances. Let $E_1(h),\ E_2(h)$ be such that, $\forall h\in\,]0,1],\ 0\leqslant L^{-1}<E_1(h)\leqslant E_2(h)\leqslant L<+\infty$ where $L\gg 1$ is constant independent on h. Assume that $\omega(h), S(h)>0$ satisfy $\lim_{h\to 0}\omega(h)=0$ and $S(h)\leqslant h^{(3n+5)/2}\omega(h)$. Set

$$\Omega_0(h)=\left\{z\in\mathbb{C};\ E_1(h)-\omega(h)\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant E_2(h)+\omega(h),\ 0\leqslant-\operatorname{Im}z\leqslant S(h)\right\}. \tag{1}$$

We say that a resonance is simple, if it is a simple pole of the scattering amplitude. Throughout this paper, we will assume that each $\xi\in\Omega_0(h)\cap\mathrm{Res}(P(h))$ is simple and we will denote

$$\Lambda(h)=\Omega_0(h)\cap\mathrm{Res}\big(P(h)\big)\quad\text{and}\quad K(h)=\sharp\,\Lambda(h).$$

We suppose that the set of resonances $\Lambda(h)$ is isolated in the sense that:

$$\mathrm{Res}\big(P(h)\big)\cap\big(\Omega(h)\setminus\Omega_0(h)\big)=\emptyset, \tag{2}$$

where $\Omega(h)$ is defined by (6). Let us notice that if $\omega(h)$ satisfies $0<\omega(h)<h^{n+\alpha}$ with $\alpha>0$, then $E_1(h)$ and $E_2(h)$ can be chosen so that (2) holds. This is a direct consequence of the fact that

$$\sharp\big(\mathrm{Res}\big(P(h)\big)\cap\big(\big[L^{-1},L\big]+\mathrm{i}\big[-h^{-n-2}S(h),0\big]\big)\big)=\mathcal{O}\big(h^{-n}\big),$$

which comes from the trace formula proved in [6,7].

Under the above assumptions, the scattering amplitude takes the form

$$f(\theta,\omega,z,h)=\sum_{\xi\in\Lambda(h)}\frac{f_\xi^{\mathrm{res}}(\theta,\omega,h)}{z-\xi}+f^{\mathrm{hol}}(\theta,\omega,z,h),$$

where $f^{\mathrm{hol}}(\theta,\omega,z,h)$ is holomorphic in $\Omega(h)$. Our aim is to estimate the residues $f_\xi^{\mathrm{res}}(\theta,\omega,h)$ and the holomorphic part $f^{\mathrm{hol}}(\theta,\omega,z,h)$. For this purpose, we need a separation condition on the resonances of $P(h)$. More precisely, we suppose that there exists $\varepsilon>0$ such that the following condition is satisfied.

Assumption $(\mathrm{Sep}_\varepsilon)$. For all $\xi,\xi'\in\Lambda(h)$ with $\xi\neq\xi'$, we have $|\xi-\xi'|\geqslant\varepsilon S(h)$.

Now, we are in position to announce the main result of this Note.

Theorem 0.1. *Assume that the potential V satisfies hypotheses* (Hol_∞) *and* $(\mathrm{Sep}_\varepsilon)$ *with $\varepsilon>0$. Assume that all resonances in $\Omega_0(h)$ are simple and that* (2) *is satisfied. Let $(\theta,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1}$ with $\theta\neq\omega$. Then, there exist $C_\varepsilon>0$ and $h_0>0$ such that for all $0<h<h_0$, we have*

$$\left|f_\xi^{\mathrm{res}}(\theta,\omega,h)\right|\leqslant C_\varepsilon h^{-(n-1)/2}K(h)^{24/\varepsilon^2}\,|\operatorname{Im}\xi|,\quad\forall\xi\in\Lambda(h),$$
$$\left|f^{\mathrm{hol}}(\theta,\omega,z,h)\right|\leqslant C_\varepsilon h^{-(n-1)/2}K(h)^{24/\varepsilon^2}\log\big(1+K(h)\big),\quad\forall z\in\widetilde{\Omega}(h),$$

where $\widetilde{\Omega}(h)$ is the subset of $\Omega(h)$ defined by (10).

Remark 1. The above result shows that there is an exact compensation between the residue and the imaginary part of the resonance. It was obtained first by Lahmar-Benbernou and Martinez [3] in the very particular case of a "well in a island". In [9], Stefanov proved this result for general compactly supported perturbations under a more restrictive separation condition (roughly speaking he required condition (Sep_ε) with "$\varepsilon = h^{-n+2}$").

1. Introduction

Dans cette Note, on considère l'opérateur de Schrödinger semiclassique $P(h) = -h^2\Delta + V(x)$ sur $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $0 < h < 1$. On suppose que le potentiel V est de classe C^∞ et satisfait l'hypothèse suivante

Hypothèse (Hol_∞). Il existe $\theta_0 \in]0,\pi[$ et $R > 0$ tels que le potentiel V se prolonge analytiquement au domaine

$$D_{R,\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| > R,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant \tan\theta_0 |\operatorname{Re} z|\}$$

et

$$\exists \beta > 0,\ \exists C > 0,\ \forall x \in D_{R,\theta_o},\quad |V(x)| \leqslant C|x|^{-\beta}.$$

Remarquons que d'après la formule de Cauchy, la condition (Hol_∞) implique que le potentiel V est de longue portée au sens suivant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\quad |\partial_x^\alpha V(x)| \leqslant C_\alpha (1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}(\rho+|\alpha|)},\quad \rho > 0.$$

Dans ces conditions, l'amplitude de diffusion $f(\theta,\omega,\lambda,h)$, associée aux opérateurs $P(h)$ et $P_0(h) = -h^2\Delta$ est bien définie et c'est une fonction régulière par rapport à $(\theta,\omega) \in S^{n-1}\times S^{n-1}\setminus\{\theta=\omega\}$. De plus, sous l'hypothèse (Hol_∞), Gérard et Martinez [2] ont démontré que l'amplitude de diffusion possède un prolongement méromorphe à un voisinage conique de l'axe réel. Les pôles de ce prolongement sont exactement les résonances appartenant à la région $\{\operatorname{Im} z < 0\}$. Ici, les résonances de P sont définies par la méthode des dilatations analytiques [6]. Dans la suite nous noterons $\operatorname{Res}(P(h))$ l'ensemble des résonances de $P(h)$.

Nous allons maintenant formuler nos hypothèses sur les résonances. Considérons $E_1(h)$, $E_2(h)$ tels que $\forall h \in]0,1]$, $0 \leqslant L^{-1} < E_1(h) \leqslant E_2(h) \leqslant L < +\infty$, où $L > 1$ est une constante indépendante de h. Supposons que $\omega(h), S(h) > 0$ satisfont

$$\lim_{h\to 0}\omega(h) = 0 \quad \text{et} \quad S(h) \leqslant h^{(3n+5)/2}\omega(h). \tag{3}$$

Nous posons aussi

$$\Omega_0(h) = \{z \in \mathbb{C};\ E_1(h) - \omega(h) \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant E_2(h) + \omega(h),\ 0 \leqslant -\operatorname{Im} z \leqslant S(h)\}. \tag{4}$$

Nous dirons qu'une résonance est simple, si c'est un pôle simple de l'amplitude de diffusion. Dans cette Note, nous supposerons que chaque résonance de $\Omega_0(h) \cap \operatorname{Res}(P(h))$ est simple et nous noterons

$$\Lambda(h) = \Omega_0(h) \cap \operatorname{Res}(P(h)) \quad \text{et} \quad K(h) = \sharp\,\Lambda(h).$$

Nous supposerons aussi que l'ensemble $\Lambda(h)$ est isolé au sens où

$$\operatorname{Res}(P(h)) \cap (\Omega(h) \setminus \Omega_0(h)) = \emptyset, \tag{5}$$

avec

$$\Omega(h) = \{z \in \mathbb{C};\ E_1(h) - 7\omega(h) \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant E_2(h) + 7\omega(h),\ 0 \leqslant -\operatorname{Im} z \leqslant 4h^{-n-2}S(h)\}. \tag{6}$$

Remarquons que dans le cas où $\omega(h)$ vérifie $0 < \omega(h) < h^{n+\alpha}$ avec $\alpha > 0$, nous pouvons choisir $E_1(h)$ et $E_2(h)$ de sorte que (5) soit satisfaite. Ceci est une conséquence directe de l'estimation

$$\sharp\big(\operatorname{Res}(P(h)) \cap ([L^{-1}, L] + \mathrm{i}[-h^{-n-2}S(h), 0])\big) = \mathcal{O}(h^{-n}),$$

qui découle de la formule des traces démontrée dans [6,7]. Dans ces conditions, l'amplitude de diffusion s'écrit sous la forme suivante :

$$f(\theta,\omega,z,h)=\sum_{\xi\in\Lambda(h)}\frac{f_\xi^{\mathrm{res}}(\theta,\omega,h)}{z-\xi}+f^{\mathrm{hol}}(\theta,\omega,z,h),\tag{7}$$

où $f^{\mathrm{hol}}(\theta,\omega,z,h)$ est holomorphe dans $\Omega(h)$. Notre but est d'estimer les résidus $f_\xi^{\mathrm{res}}(\theta,\omega,h)$ ainsi que la partie holomorphe $f^{\mathrm{hol}}(\theta,\omega,z,h)$. Pour cela, nous avons besoin d'une condition de séparation sur les résonances de $P(h)$. Nous supposerons qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que la condition suivante est satisfaite.

Hypothèse $(\mathrm{Sep}_\varepsilon)$. Pour tous $\xi,\xi'\in\Lambda(h)$ avec $\xi\neq\xi'$, nous avons $|\xi-\xi'|\geqslant\varepsilon S(h)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette Note.

Théorème 1.1. *Supposons que le potentiel V satisfait les hypothèses* (Hol_∞) *et* $(\mathrm{Sep}_\varepsilon)$ *avec* $\varepsilon>0$. *Supposons aussi que les résonances de $P(h)$ appartenant à $\Omega_0(h)$ sont simples et que* (5) *est satisfaite. Soit* $(\theta,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1}$ *avec $\theta\neq\omega$. Alors, il existe des constantes $C_\varepsilon>0$ et $h_0>0$ telles que pour tout $0<h<h_0$, nous avons*

$$\left|f_\xi^{\mathrm{res}}(\theta,\omega,h)\right|\leqslant C_\varepsilon h^{-(n-1)/2}K(h)^{24/\varepsilon^2}|\mathrm{Im}\,\xi|,\quad \forall\xi\in\Lambda(h),\tag{8}$$

$$\left|f^{\mathrm{hol}}(\theta,\omega,z,h)\right|\leqslant C_\varepsilon h^{-(n-1)/2}K(h)^{24/\varepsilon^2}\log\bigl(1+K(h)\bigr),\quad \forall z\in\widetilde{\Omega}(h),\tag{9}$$

où

$$\widetilde{\Omega}(h)=\bigl\{z\in\mathbb{C};\ E_1(h)-\omega(h)\leqslant\mathrm{Re}\,z\leqslant E_2(h)+\omega(h),\ 0\leqslant-\mathrm{Im}\,z\leqslant 2S(h)\bigr\}.\tag{10}$$

Rappelons que le premier résultat montrant qu'il y a compensation exacte entre le résidu de l'amplitude de diffusion et la partie imaginaire de la résonance considérée est dû à Lahmar-Benbernou et Martinez [3] et concerne le cas très particulier d'un « puits dans une île ». Dans [9], Stefanov a généralisé ce résultat au cas de perturbations à support compact et de résonances isolées.

Notre résultat améliore donc [9] dans plusieurs directions. Tout d'abord, notre théorème est valable pour des potentiels de longue portée tandis que le résultat de Stefanov concerne des perturbations à support compact. Ceci crée des difficultés dues au fait que dans le cas longue portée, nous ne disposons pas d'une formule de représentation simple pour f.

La seconde différence importante concerne le nombre de résonances considérées. Dans [9], Stefanov traite le cas où $z_0(h)$ est l'unique résonance dans $\Omega(h)$. Ici, nous considérons le cas où le nombre $K(h)$ de résonances est quelconque et notre condition de séparation est plus faible que celle de Stefanov, puisqu'il requiert la condition $(\mathrm{Sep}_\varepsilon)$ avec « $\varepsilon=h^{-n+2}$ ».

Comme $K(h)$ peut se comporter comme h^{-n} quand h tend vers 0, notre but est de prouver que la borne sur les résidus dépend polynomialement de $K(h)$, alors qu'il serait plus simple d'obtenir une borne dépendant exponentiellement de $K(h)$.

2. Esquisse de démonstration

En nous inspirant du travail de Stefanov [9], nous introduisons la fonction auxiliaire définie par

$$F(z,h)=\Biggl(\prod_{\xi\in\Lambda(h)}\frac{z-\xi}{z-\bar{\xi}}\Biggr)f(\theta,\omega,z,h),\quad \forall z\in\Omega(h).\tag{11}$$

A partir des formules (7) et (11), nous obtenons facilement l'égalité suivante

$$f_\xi^{\mathrm{res}}(\theta,\omega,h) = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\xi)F(\xi,h)\left(\prod_{\zeta\in\Lambda(h)\setminus\{\xi\}}\frac{\xi-\bar\zeta}{\xi-\zeta}\right), \quad \forall\xi\in\Lambda(h). \tag{12}$$

Dès lors, la démonstration de l'estimation (8) se décompose en deux parties. On commence par montrer que

$$\big|F(z,h)\big| \leqslant Ch^{-(n-1)/2}, \quad \forall z\in\widetilde{\Omega}(h). \tag{13}$$

Dans un second temps, on estime le terme

$$\Pi(\xi,h) = \prod_{\zeta\in\Lambda(h)\setminus\{\xi\}}\frac{\xi-\bar\zeta}{\xi-\zeta}.$$

Étape 1 : Estimation de $F(z,h)$. Par construction, la fonction F est holomorphe dans $\Omega(h)$. On peut donc appliquer le principe du maximum semiclassique (cf. [8,10]). Plus précisément, d'après le Lemme 1 de [8], il suffit de démontrer qu'il existe $C>0$ tel que

$$\big|F(z,h)\big| \leqslant Ch^{-(n-1)/2}, \quad \forall z\in\big[E_1(h)-7\omega(h), E_2(h)+7\omega(h)\big], \tag{14}$$

$$\big|F(z,h)\big| \leqslant C\,\mathrm{e}^{Ch^{-n-1}}, \quad \forall z\in\Omega_{3/4}(h). \tag{15}$$

avec

$$\Omega_{3/4}(h) = \left\{z\in\mathbb{C};\ E_1(h)-\frac{21}{4}\omega(h)\leqslant \mathrm{Re}\,z\leqslant E_2(h)+\frac{21}{4}\omega(h),\ 0\leqslant -\mathrm{Im}\,z\leqslant 3h^{-n-2}S(h)\right\}.$$

L'estimation (14) est une conséquence du Théorème 1.1 de [4]. En effet, d'après ce résultat nous savons que pour tout compact $K\subset\mathbb{R}_+^*$, nous avons $|f(\theta,\omega,z,h)|\leqslant Ch^{-(n-1)/2}$, $\forall z\in K$. D'autre part, pour $z\in\mathbb{R}_+^*$, nous avons clairement $|F(z,h)| = |f(\theta,\omega,z,h)|$. En réunissant ces deux résultats, l'estimation (14) devient évidente.

L'idée de démonstration de (15) est la suivante. On reprend les formules donnant le prolongement de f établi dans [2], pour écrire $f(\theta,\omega,z,h) = f_1(\theta,\omega,z,h)+f_2(\theta,\omega,z,h)$, où f_1 et f_2 sont données de manière explicite. On montre par des calculs directs que f_1 vérifie une estimation du type (15), tandis que le cas de f_2 nécessite des résultats plus profonds. Via l'expression de f_2, il s'agit de montrer que

$$\left\|\left(\prod_{\xi\in\Lambda(h)}\frac{z-\xi}{z-\bar\xi}\right)\big(P_\mu(h)-z\big)^{-1}\right\|_{L^2(\Gamma_\mu),L^2(\Gamma_\mu)} \leqslant C\,\mathrm{e}^{Ch^{-n-1}}, \tag{16}$$

pour tout z dans $\Omega_{3/4}(h)$. Ici, $P_\mu(h)$ désigne l'opérateur modifié défini dans [6], qui permet de construire les résonances. L'obtention de cette estimation repose sur le Lemme 1 de [10] et sur l'existence d'une bande de taille $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-C/h})$ libre de résonances démontrée par Burq [1]. Pour plus de détails, nous renvoyons à [5].

Étape 2 : Estimation de $\Pi(\xi,h)$. Le point clef de la démonstration consiste à utiliser l'hypothèse $(\mathrm{Sep}_\varepsilon)$, pour ranger les résonances de $\Lambda(h)$ convenablement. Plus précisément, nous avons le lemme suivant, dont on trouvera une démonstration dans [5].

Lemme 2.1. *Supposons* $(\mathrm{Sep}_\varepsilon)$ *avec* $0<\varepsilon<1$ *et soit* $\alpha\in[E_1(h)-\omega(h), E_2(h)+\omega(h)]$. *Alors, nous pouvons trouver* $L_\varepsilon(h)\in[\frac{\varepsilon}{2}K(h), (\frac{2}{\varepsilon}-1)^{-1}K(h)]$ *tel que*

$$\Lambda(h) = \bigcup_{j=1}^{L_\varepsilon(h)}\bigcup_{i=1}^{[2/\varepsilon]}\{z_{ij}\} \tag{17}$$

et

$$\forall z \in \Omega(h) \cap \{\operatorname{Re} z = \alpha\},\ \forall j \geqslant 2,\ \forall i \in \bigl\{1, \ldots, [2/\varepsilon]\bigr\}, \quad |z - z_{ij}| \geqslant (j-1)\frac{\varepsilon S(h)}{6}. \tag{18}$$

A l'aide de ce lemme nous pouvons achever la démonstration du Théorème 1.1. Par définition, nous avons

$$\bigl|\Pi(\xi, h)\bigr| \leqslant \prod_{\zeta \in \Lambda(h) \setminus \{\xi\}} \left(1 + \frac{2|\operatorname{Im} \xi|}{|\xi - \zeta|}\right).$$

Nous appliquons le Lemme 2.1 avec $\alpha = \operatorname{Re} \xi$. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\Lambda(h) = \bigcup_{j=1}^{L_\varepsilon(h)} \bigcup_{i=1}^{[2/\varepsilon]} \{z_{ij}\}$$

avec $z_{11} = \xi$ et $\forall j \geqslant 2,\ \forall i \in \{1, \ldots, [2/\varepsilon]\},\ |\xi - z_{ij}| \geqslant (j-1)\frac{\varepsilon S(h)}{6}$. Par suite, en invoquant (Sep_ε) pour séparer ξ et $z_{1i},\ i = 1, \ldots, [2/\varepsilon]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\bigl|\Pi(\xi, h)\bigr| &\leqslant \prod_{i=2}^{[2/\varepsilon]} \left(1 + \frac{2S(h)}{\varepsilon S(h)}\right) \prod_{j=2}^{L_\varepsilon(h)} \prod_{i=1}^{[2/\varepsilon]} \left(1 + \frac{12 S(h)}{(j-1)\varepsilon S(h)}\right) \\ &\leqslant \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^{[2/\varepsilon]-1} \prod_{j=2}^{L_\varepsilon(h)} \prod_{i=1}^{[2/\varepsilon]} \left(1 + \frac{12}{(j-1)\varepsilon}\right) \leqslant C_\varepsilon \bigl(1 + L_\varepsilon(h)\bigr)^{24/\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons $L_\varepsilon(h) \leqslant (\frac{2}{\varepsilon} - 1)^{-1} K(h) \leqslant K(h)$ et nous trouvons

$$\bigl|\Pi(\xi, h)\bigr| \leqslant C_\varepsilon \bigl(1 + K(h)\bigr)^{24/\varepsilon^2}, \tag{19}$$

ce qui achève l'étape 2.

Finalement, en combinant (12), (13) et (19), nous obtenons l'estimation (8). La démonstration de (9) repose sur des arguments identiques et nous renvoyons à [5] pour plus de détails.

Remerciements

L'auteur tient à remercier V. Petkov pour lui avoir suggéré ce sujet et P. Stefanov pour ses remarques.

Références

[1] N. Burq, Lower bounds for shape resonances width of long range Schrödinger operators, Amer. J. Math. 124 (4) (2002) 677–735.
[2] C. Gerard, Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à deux corps à longue portée, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 51 (1) (1989) 81–110.
[3] A. Lahmar-Benbernou, A. Martinez, Semiclassical asymptotics of the residues of the scattering matrix for shape resonances, Asymptotic Anal. 20 (1) (1999) 13–38.
[4] L. Michel, Semi-classical behavior of the scattering amplitude for trapping perturbations at fixed energy, Canad. J. Math., to appear.
[5] L. Michel, Semi-classical estimate of the residues of the scattering amplitude for long-range potentials, Preprint Univ. Bordeaux 1, 2002.
[6] J. Sjöstrand, A trace formula and review of some estimates for resonances, in: Microlocal Analysis and Spectral Theory, Lucca, 1996, Kluwer Academic, Dordrecht, 1997, pp. 377–437.
[7] J. Sjöstrand, Resonances for bottles and trace formulae, Math. Nachr. 221 (2001) 95–149.
[8] P. Stefanov, Resonance expansions and Rayleigh waves, Math. Res. Lett. 8 (1–2) (2001) 107–124.
[9] P. Stefanov, Estimates on the residues of the scattering amplitude, Asymptotic Anal. 32 (3–4) (2002) 317–333.
[10] S.H. Tang, M. Zworski, From quasi-modes to resonances, Math. Res. Lett. 5 (1998) 261–272.