



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 671–676



Analyse numérique

## Choix du paramètre de pénalisation pour la discrétisation par éléments finis des équations de Navier–Stokes

## Choice of the penalty parameter for the finite element discretization of Navier–Stokes equations

Christine Bernardi, Vivette Girault, Frédéric Hecht

Laboratoire Jacques-Louis Lions, CNRS & Université Pierre et Marie Curie, boîte 187, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 17 novembre 2002 ; accepté le 25 février 2003

Présenté par Olivier Pironneau

---

### Résumé

On considère les équations de Navier–Stokes discrétisées par méthode de pénalisation et éléments finis. Le but de cette Note est d'établir des estimations d'erreur a posteriori permettant un choix optimal du paramètre de pénalisation, en particulier dans le cas de maillages adaptatifs. *Pour citer cet article* : C. Bernardi et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

We consider the Navier–Stokes equations, discretized by a penalization method and finite elements. The aim of this Note is to prove a posteriori error estimates which allow for an optimal choice of the penalty parameter, specially for adaptive meshes. *To cite this article*: C. Bernardi et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

---

### Abridged English version

A large part of the software for the simulation of the steady Navier–Stokes equations requires the addition of a penalty term, namely the pressure multiplied by a “small” parameter  $\varepsilon$ , see [1] and [4], and the choice of this parameter is most often arbitrary. The aim of this paper is mainly to exhibit two types of error indicators, respectively linked to the penalty method and to the finite element discretization, that lead to optimal a posteriori estimates and allow for optimizing the choice of the parameter  $\varepsilon$  either when working with adaptive meshes or not.

We consider the Navier–Stokes equations (1) in a bounded connected open set  $\Omega$  of  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  or  $3$ , with a Lipschitz–continuous boundary, and recall that it admits the equivalent variational formulation (2). Next, for a parameter  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ , we consider the penalized problem (3) or its equivalent formulation (4). Finally, a finite element discretization, relying on two finite-dimensional subspaces  $X_h$  of  $H_0^1(\Omega)^d$  and  $M_h$  of  $L_0^2(\Omega)$  and on

---

Adresse e-mail : [bernardi@ann.jussieu.fr](mailto:bernardi@ann.jussieu.fr) (C. Bernardi).

problem (3) leads to the discrete problem (5). One of the main advantages of the penalty technique is that it provides an algorithm for solving this problem as a system of two uncoupled equations (6), one for the velocity and one for the pressure.

The existence of a solution of problem (3) is easily derived from Brouwer's fixed point theorem. To go further, we write problems (3) and (5) in the new formulation (8); for appropriate definitions of the Stokes operator  $\mathcal{S}$ , see (7), and the penalized Stokes operator  $\mathcal{S}_\varepsilon$ . Then, using the stability and convergence properties (9), we derive from the arguments in [3] (see also [5, Chapter IV, Theorem 3.4]) the a priori error estimate (10) for any solution  $(\mathbf{u}, p)$  of problem (3) such that  $\text{Id} + \mathcal{S}DG(\mathbf{u})$  is an isomorphism of  $\mathcal{X} = H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ . Similarly, we write the formulation (11) of problem (5). We refer to [5, Chapter II, Theorem 1.3] for the rather technical proof of the convergence property (14) when assumptions (12) and (13) are satisfied. Then the arguments in [3] allow for deriving that, when these assumptions hold and for any solution  $(\mathbf{u}, p)$  of problem (3) such that  $\text{Id} + \mathcal{S}DG(\mathbf{u})$  is an isomorphism of  $\mathcal{X}$ , the existence of a solution  $(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h})$  of problem (5) in a fixed neighbourhood of  $(\mathbf{u}, p)$ . Moreover the sequence of solutions  $(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h})$  converges towards  $(\mathbf{u}, p)$  when both  $\varepsilon$  and  $h$  tend to zero.

In a last step, we introduce a regular family of triangulations  $(\mathcal{T}_h)_h$  of  $\Omega$  by  $d$ -simplices, in the sense of [5, Chapter I, Appendix A] and we assume that, for each  $h$ , the spaces  $X_h$  and  $M_h$  are built from finite elements associated with all elements  $K$  of  $\mathcal{T}_h$ . According to the ideas in [2], we define the error indicator  $\eta_\varepsilon$  linked to the penalty method by (15) and the error indicators  $\eta_K$  linked to the finite element discretization by (16) ( $\mathcal{E}_K$  denotes the set of edges ( $d = 2$ ) or faces ( $d = 3$ ) of  $K$  which are not contained in  $\partial\Omega$ ,  $h_K$  and  $h_e$  the diameters of  $K$  and  $e$ , respectively, and  $\mathbf{f}_h$  an approximation of the data  $\mathbf{f}$  in the space  $Z_h^d$ , see (17)). We are thus in a position to derive the main result of this note, which relies on the arguments of [7, Theorem 3], see also [8, Proposition 2.1].

**Theorem.** *Let  $(\mathbf{u}, p)$  be a solution of problem (2) such that  $\text{Id} + \mathcal{S}DG(\mathbf{u})$  is an isomorphism of  $\mathcal{X}$ . If the data  $\mathbf{f}$  belong to  $L^2(\Omega)^d$  and if the space  $X_h$  contains  $Y_h^d$ , with  $Y_h$  defined in (19), there exists two positive real numbers  $\varepsilon_2^*$  and  $h_2^*$  such that estimate (20) holds for all  $\varepsilon \leq \varepsilon_2^*$  and  $h \leq h_2^*$ .*

The converse estimate can easily be proved thanks to the arguments in [2]. Moreover these results are confirmed by a numerical experiment, performed on the code FreeFem++ (cf. [6]), see Fig. 1, where the final adapted value of  $\varepsilon$  is  $0.14 \times 10^{-2}$ .

## 1. Introduction

La plupart des codes de calcul pour les équations de Navier–Stokes stationnaires font appel à une méthode de pénalisation : un terme portant sur la pression, multiplié par un paramètre  $\varepsilon$ , est ajouté à l'équation d'incompressibilité. On réfère à [1] et [4] pour l'analyse de cette méthode. Toutefois le choix de  $\varepsilon$  est en général complètement arbitraire. Dans le cadre de la discrétisation de ces équations par éléments finis, on démontre grâce aux arguments de [3] les estimations a priori établissant la convergence de la méthode. Puis on propose deux types d'indicateurs d'erreur, l'un lié au terme de pénalisation, l'autre lié aux maillages, et on prouve des estimations d'erreur a posteriori optimales. Ceci atteste que les indicateurs d'erreur fournissent un outil efficace pour un choix numériquement justifié du paramètre  $\varepsilon$  dans le cas de maillages adaptatifs.

## 2. Les problèmes continu, pénalisé et discret

Les équations de Navier–Stokes dans un ouvert borné connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$ , à frontière lipschitzienne régissent l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{grad} p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Ici, les inconnues sont la vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$ , la donnée  $\mathbf{f}$  représentant une densité de forces extérieures. La viscosité  $\nu$  est une constante positive. On introduit les formes bilinéaires  $a(\cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot)$ , ainsi que la forme trilinéaire  $C(\cdot; \cdot, \cdot)$ , définies par

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$C(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

et on vérifie facilement que ce problème admet la formulation variationnelle équivalente suivante

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}, p) \text{ dans } H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega) \text{ tel que} \\ & \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + C(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \\ & \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad b(\mathbf{u}, q) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

où  $L_0^2(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions de  $L^2(\Omega)$  à moyenne nulle et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit de dualité entre  $H^{-1}(\Omega)^d$  et  $H_0^1(\Omega)^d$ . Pour toute donnée  $\mathbf{f}$  dans  $H^{-1}(\Omega)^d$ , le problème (2) admet au moins une solution  $(\mathbf{u}, p)$ .

Soit maintenant  $\varepsilon$  un nombre réel,  $0 < \varepsilon \leq 1$ . On considère le problème pénalisé suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) \text{ dans } H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega) \text{ tel que} \\ & \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + C(\mathbf{u}_\varepsilon; \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_\varepsilon) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \\ & \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad b(\mathbf{u}_\varepsilon, q) - \varepsilon \int_{\Omega} p_\varepsilon(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Une propriété de base de ce problème est qu'il s'écrit de façon équivalente sous forme du système de deux équations découplées suivant :

$$\begin{aligned} & \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}) (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + C(\mathbf{u}_\varepsilon; \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \\ & \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \varepsilon \int_{\Omega} p_\varepsilon(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = b(\mathbf{u}_\varepsilon, q). \end{aligned} \quad (4)$$

Finalement, pour toute valeur  $h$  d'un paramètre positif, on introduit deux sous-espaces de dimension finie  $X_h$  et  $M_h$  de  $H_0^1(\Omega)^d$  et  $L_0^2(\Omega)$ , respectivement, et on considère le problème

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h}) \text{ dans } X_h \times M_h \text{ tel que} \\ & \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad a(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, \mathbf{v}_h) + C(\mathbf{u}_{\varepsilon h}; \mathbf{u}_{\varepsilon h}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_{\varepsilon h}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle, \\ & \forall q_h \in M_h, \quad b(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, q_h) - \varepsilon \int_{\Omega} p_{\varepsilon h}(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Là encore, ce problème s'écrit de façon équivalente

$$\begin{aligned} & \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad a(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, \mathbf{v}_h) + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} (\Pi_h \operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon h})(\mathbf{x}) (\Pi_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + C(\mathbf{u}_{\varepsilon h}; \mathbf{u}_{\varepsilon h}, \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle, \\ & \forall q_h \in M_h, \quad \varepsilon \int_{\Omega} p_{\varepsilon h}(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = b(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, q_h), \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\Pi_h$  désigne l'opérateur de projection orthogonale de  $L_0^2(\Omega)$  sur  $M_h$ . On reconnaît là un des principaux avantages de la méthode de pénalisation : elle fournit de façon naturelle un algorithme de résolution du problème discret où le calcul des deux inconnues est découplé.

### 3. Existence de solutions et estimations d'erreur a priori

En appliquant le théorème du point fixe de Brouwer à la première ligne du problème (4) et en utilisant un argument de densité, on prouve facilement le résultat suivant.

**Proposition 3.1.** *Pour toute donnée  $f$  dans  $H^{-1}(\Omega)^d$ , il existe un réel  $\varepsilon_0 > 0$  ne dépendant que de  $f$  et  $v$  tel que, pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , le problème (3) admette une solution  $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ .*

Pour aller plus loin, on utilise un formalisme introduit dans [3]. On note  $\mathcal{X}$  l'espace-produit  $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$  et  $\mathcal{S}$  l'opérateur qui, à toute donnée  $(f, g)$  dans le dual  $\mathcal{X}'$  de  $\mathcal{X}$ , associe la solution  $(\mathbf{u}, p)$  du problème

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle f, \mathbf{v} \rangle, \\ \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad b(\mathbf{u}, q) &= \int_{\Omega} g(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (7)$$

qui est l'analogue de (2) dans le cas où  $\frac{1}{\nu}$  est égal à zéro. De même, on note  $\mathcal{S}_\varepsilon$  et  $\mathcal{S}_{\varepsilon h}$  les opérateurs correspondants aux problèmes pénalisé et discret analogues à (3) et (5) pour  $\frac{1}{\nu} = 0$ . Il est en effet facile de vérifier que chacun de ces problèmes admet une solution unique, de sorte que les trois opérateurs précédents sont bien définis.

On pose ensuite :  $G(\mathbf{u}) = (\frac{1}{\nu}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - f, 0)$ . Les problèmes (2) et (3) s'écrivent alors de façon équivalente

$$(\mathbf{u}, p) + \mathcal{S}G(\mathbf{u}) = 0, \quad (\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) + \mathcal{S}_\varepsilon G(\mathbf{u}_\varepsilon) = 0. \quad (8)$$

On peut facilement démontrer (voir [5, Chapitre I, Théorème 4.3]) que l'opérateur  $\mathcal{S}_\varepsilon$  vérifie les propriétés suivantes, où la constante  $c$  est indépendante de  $\varepsilon$ ,

$$\forall G \in \mathcal{X}', \quad \|\mathcal{S}_\varepsilon G\|_{\mathcal{X}} \leq c \|G\|_{\mathcal{X}'} \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(\mathcal{S} - \mathcal{S}_\varepsilon)G\|_{\mathcal{X}} = 0. \quad (9)$$

En notant que la fonction  $G$  est continûment différentiable sur  $H_0^1(\Omega)^d$  à valeurs dans  $\mathcal{X}'$ , à différentielle lipschitzienne et compacte, on déduit de [3] (voir aussi [5, Chapitre IV, Théorème 3.4]) le

**Théorème 3.2.** *Soit  $(\mathbf{u}, p)$  une solution du problème (2) telle que l'opérateur  $\text{Id} + \mathcal{S}DG(\mathbf{u})$  soit un isomorphisme de  $\mathcal{X}$ . Il existe deux réels  $\varepsilon_0^* > 0$  et  $\lambda > 0$  tels que, pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_0^*$ , le problème (3) admette une solution unique  $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$  dans la boule de centre  $(\mathbf{u}, p)$  et de rayon  $\lambda$ . En outre, cette solution vérifie la majoration d'erreur a priori, où la constante  $c$  est indépendante de  $\varepsilon$ ,*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)^d} + \|p - p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon (\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} + \|p\|_{L^2(\Omega)}). \quad (10)$$

De façon similaire, le problème (5) s'écrit

$$(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h}) + \mathcal{S}_{\varepsilon h} G(\mathbf{u}_{\varepsilon h}) = 0. \quad (11)$$

S'il existe une constante  $\beta > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\forall q_h \in M_h, \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{H^1(\Omega)^d}} \geq \beta \|q_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad (12)$$

la norme de l'opérateur  $\mathcal{S}_{\varepsilon h}$  de  $\mathcal{X}'$  dans  $\mathcal{X}$  est bornée indépendamment de  $\varepsilon$  et  $h$ . La propriété suivante requiert une preuve plus technique (voir [5, Chapitre II, Théorème 1.3]) : sous l'hypothèse (12) et si

$$\forall V \in \mathcal{X}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{V_h \in X_h \times M_h} \|V - V_h\|_{\mathcal{X}} = 0, \quad (13)$$

il existe un réel  $\varepsilon_1 > 0$  tel que, pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ , on ait

$$\forall G \in \mathcal{X}', \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|(\mathcal{S}_\varepsilon - \mathcal{S}_{\varepsilon h})G\|_{\mathcal{X}} = 0. \quad (14)$$

On déduit alors de [3] les propriétés du problème (5).

**Théorème 3.3.** *Sous l’hypothèse du Théorème 3.2 et les hypothèses (12) et (13), il existe trois réels  $\varepsilon_1^* > 0$ ,  $h_1^* > 0$  et  $\lambda^* > 0$  tels que, pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_1^*$  et  $h \leq h_1^*$ , le problème (5) admette une solution unique  $(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h})$  dans la boule de centre  $(\mathbf{u}, p)$  et de rayon  $\lambda^*$ , qui converge vers  $(\mathbf{u}, p)$  lorsque  $\varepsilon$  et  $h$  tendent vers 0.*

On peut bien sûr, moyennant quelques conditions sur les propriétés d’approximation de  $X_h \times M_h$  et des hypothèses de régularité de la solution  $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$  introduite dans le Théorème 3.2, prouver par les mêmes arguments une estimation de l’erreur entre  $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$  et  $(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h})$  dans  $\mathcal{X}$ .

**4. Indicateurs d’erreur et estimations d’erreur a posteriori**

On introduit maintenant une famille de triangulations régulière  $(\mathcal{T}_h)_h$  par des  $d$ -simplexes, au sens de [5, Chapitre I, Appendix A] et on suppose que, pour tout  $h$ , les espaces  $X_h$  et  $M_h$  sont construits à partir d’éléments finis liés à chaque élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ . Par analogie avec [2], on définit les deux types d’indicateurs suivants :

- indicateur lié à la méthode de pénalisation

$$\eta_\varepsilon = \varepsilon \|p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)}; \tag{15}$$

- indicateurs liés à la discrétisation par éléments finis : pour tout  $K$  dans  $\mathcal{T}_h$ ,

$$\begin{aligned} \eta_K = h_K & \left\| \mathbf{f}_h + \Delta \mathbf{u}_{\varepsilon h} - \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}_{\varepsilon h} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\varepsilon h} - \mathbf{grad} p_{\varepsilon h} \right\|_{L^2(K)^d} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{1/2} \left\| [\partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}]_e \right\|_{L^2(e)^d} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon h}\|_{L^2(K)}, \end{aligned} \tag{16}$$

où  $h_K$  désigne le diamètre de  $K$ ,  $\mathcal{E}_K$  l’ensemble des côtés ( $d = 2$ ) ou faces ( $d = 3$ ) de  $K$  qui ne sont pas contenus dans  $\partial\Omega$  et, pour tout  $e$  dans  $\mathcal{E}_K$ ,  $h_e$  est le diamètre de  $e$  et  $[\cdot]_e$  signifie le saut à travers  $e$ . La fonction  $\mathbf{f}_h$  représente une approximation de  $\mathbf{f}$  dans  $Z_h^d$ , où  $Z_h$  est l’espace

$$Z_h = \{g_h \in L^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, g_h|_K \in \mathcal{P}_\ell(K)\}, \tag{17}$$

et  $\mathcal{P}_\ell(K)$  désigne l’espace des restrictions à  $K$  des polynômes de degré total  $\leq \ell$ . On peut noter [8, §3.5] que les indicateurs  $\eta_K$  sont exactement ceux employés pour la discrétisation par éléments finis du problème (1) sans terme de pénalisation.

L’idée pour majorer l’erreur entre les solutions  $(\mathbf{u}, p)$  et  $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$  en fonction de  $\eta_\varepsilon$  consiste à écrire les problèmes (2) et (3) sous la forme modifiée

$$F(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{u}, p) + \mathcal{S}G(\mathbf{u}) = 0, \quad F_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) = (\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) + \mathcal{S}G_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) = 0, \tag{18}$$

où l’on pose  $G_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) = (\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{f}, -\varepsilon p_\varepsilon)$ . On a en effet

$$F(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) - F_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) = F(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) - F(\mathbf{u}, p) = \int_0^1 DF(\tau \mathbf{u} + (1 - \tau)\mathbf{u}_\varepsilon, \tau p + (1 - \tau)p_\varepsilon)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon, p - p_\varepsilon),$$

et on en déduit de l’hypothèse du Théorème 3.2 et du fait que  $DF$  soit lipschitzienne, une majoration de l’erreur entre  $(\mathbf{u}, p)$  et  $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$  dans  $\mathcal{X}$  en fonction de  $\varepsilon \|p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ , qui lui-même se majore par  $\eta_\varepsilon + \varepsilon \|p_\varepsilon - p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)}$ . On peut également majorer l’erreur entre  $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$  et  $(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h})$  grâce aux arguments de [7, Théorème 3] (voir aussi [8, Proposition 2.1]), ce qui mène au résultat suivant.

**Théorème 4.1.** *Sous l’hypothèse du Théorème 3.2, si la donnée  $\mathbf{f}$  appartient à  $L^2(\Omega)^d$  et si l’espace  $X_h$  contient l’espace  $Y_h^d$ , avec*

$$Y_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_1(K)\}, \tag{19}$$

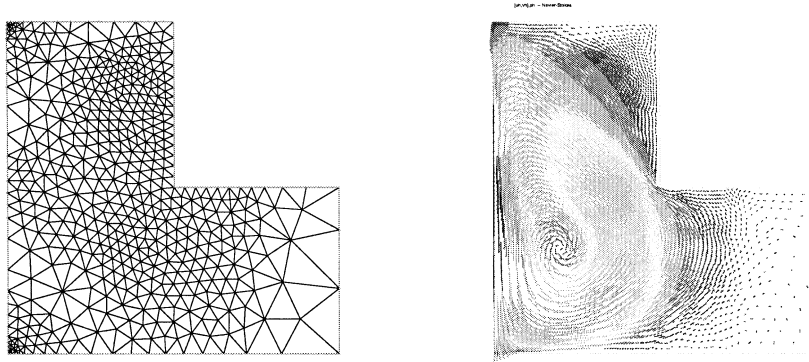


Fig. 1.

il existe deux réels  $\varepsilon_2^* > 0$  et  $h_2^* > 0$  tels que, pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_2^*$  et  $h \leq h_2^*$ , on ait la majoration

$$\|(\mathbf{u}, p) - (\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)\|_{\mathcal{X}} + \|(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) - (\mathbf{u}_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h})\|_{\mathcal{X}} \leq c \left( \eta_\varepsilon^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)^d}^2) \right)^{1/2}. \quad (20)$$

Prouver cette estimation ne requiert pas l'hypothèse (12), qui est toutefois nécessaire pour le Théorème 3.3. On peut en outre démontrer par les arguments usuels, voir [2], les estimations réciproques, à savoir que  $\eta_\varepsilon$  est majoré par une constante fois l'erreur globale, et que chaque  $\eta_K$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ , est majoré par l'erreur dans la norme de  $\mathcal{X}_K$ , où  $\mathcal{X}_K$  désigne l'espace des restrictions des fonctions de  $\mathcal{X}$  à un voisinage de  $K$ , composé au maximum de  $d + 2$  éléments de  $\mathcal{T}_h$ .

## 5. Une expérience numérique

La stratégie d'optimisation est la suivante (on réfère à [2, §5] pour une description plus détaillée) : alternativement on raffine le maillage en découpant les triangles  $K$  pour lesquels  $\eta_K$  est supérieur à la valeur moyenne des  $\eta_K$ , puis on diminue la valeur de  $\varepsilon$  lorsque  $\eta_\varepsilon$  est supérieur à  $(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2)^{1/2}$ .

Le calcul est effectué avec l'élément fini de Taylor–Hood (voir [5, Chapitre II, §4.2]) pour une viscosité  $\nu = 10^{-2}$ , dans le domaine  $]-1, 1[^2 \setminus [0, 1[^2$ . La donnée  $f$  est nulle et les conditions aux limites de Dirichlet sont homogènes sauf sur le côté  $\{-1\} \times [-1, 1]$  où la vitesse normale est nulle et la vitesse tangentielle égale à  $y^2 - 1$ . La valeur finale « adaptée » du paramètre  $\varepsilon$  est  $0,14 \times 10^{-2}$ . On présente dans la Fig. 1 le maillage final à gauche et le champ de vitesse à droite. Les calculs ont été effectués sur le logiciel FreeFem++, voir [6].

## Références

- [1] M. Bercovier, Perturbation of mixed variational problems. Application to mixed finite element methods, *RAIRO Anal. Numér.* 12 (1978) 211–236.
- [2] C. Bernardi, V. Girault, F. Hecht, A posteriori analysis of a penalty method with application to the Stokes problem, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, à paraître.
- [3] F. Brezzi, J. Rappaz, P.-A. Raviart, Finite dimensional approximation of nonlinear problems, Part I: Branches of nonsingular solutions, *Numer. Math.* 36 (1980) 1–25.
- [4] G.F. Carey, R. Krishnan, Penalty finite element method for the Navier–Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 42 (1984) 183–224.
- [5] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for the Navier–Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, 1986.
- [6] F. Hecht, O. Pironneau, FreeFem++, voir <http://www.freefem.org>.
- [7] J. Pousin, J. Rappaz, Consistency, stability, a priori and a posteriori errors for Petrov–Galerkin methods applied to nonlinear problems, *Numer. Math.* 69 (1994) 213–231.
- [8] R. Verfürth, *A Review of a Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*, Wiley & Teubner, 1996.