C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1091–1094

Calcul des variations/*Calculus of Variations*
(Économie mathématique/*Mathematical Economics*)

Théorème de l'autoroute et équation d'Hamilton–Jacobi

Alain Rapaport [a], **Pierre Cartigny** [b]

[a] Laboratoire d'analyse des systèmes et de biométrie, Institut national de la recherche agronomique, 2, place Viala, 34060 Montpellier, France

[b] GREQAM, Université de la Méditerranée, 2, rue de la Vieille Charité, 13002 Marseille, France

Reçu le 19 septembre 2002 ; accepté le 25 octobre 2002

Note présentée par Charles-Michel Marle.

Résumé Pour un problème de calcul des variations en horizon infini, linéaire en la dérivée, nous utilisons la théorie des solutions de viscosité pour obtenir une caractérisation univoque de la fonction valeur à l'aide d'une équation d'Hamilton–Jacobi. Cette approche permet d'étendre pour le cas scalaire un résultat connu sous le nom de théorème de l'autoroute. ***Pour citer cet article : A. Rapaport, P. Cartigny, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1091–1094.***

Turnpike theorem and the Hamilton–Jacobi equation

Abstract For a problem of calculus of variations in infinite horizon, linear with respect to the derivative, we use the viscosity solutions theory to obtain a unique characterization of the value function by an Hamilton–Jacobi equation. This approach allows to extend in the scalar case a known result of turnpike property. ***To cite this article: A. Rapaport, P. Cartigny, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1091–1094.***

1. Introduction

Dans cette Note on considère un problème de calcul des variations en horizon infini pour lequel l'objectif $J(\cdot)$ est du type suivant

$$J\big(x(\cdot)\big) = \int_0^{\to\infty} \mathrm{e}^{-\delta t} l\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

où $\delta > 0$ et l est une fonction réelle définie et au moins continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On cherche à maximiser J sur un ensemble, noté Adm_{x_0}, constitué par des courbes de condition initiale $x(0) = x_0$, au moins absolument continues et qui font converger l'intégrale ci-dessus.

Si le calcul des variations en horizon fini a été largement développé, il n'en va pas de même en horizon infini (Ekeland dans [9] souligne la difficulté de l'extension à l'horizon infini des conditions d'optimalité connues en horizon fini). Pour certaines classes de fonctions (continument différentiables par morceaux,

Adresses e-mail : rapaport@ensam.inra.fr (A. Rapaport); cartigny@ehess.cnrs-mrs.fr (P. Cartigny).

bornées et de dérivées bornées) des conditions nécessaires ou suffisantes ont éte obtenues ces dernières années [3,4].

Dans la littérature on trouve des résultats connus sous le nom de théorème de l'autoroute (« turnpike ») que l'on peut classer selon que l'équation d'Euler est ou non singulière.

(1) L'équation d'Euler est dite non singulière lorsqu'on peut la mettre sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre, en particulier sous la forme d'un système hamiltonien dit modifié [7]. Supposons qu'il existe une solution optimale stationnaire $x(\cdot)$, i.e., $x(t) = \bar{x}$ pour tout $t \geqslant 0$. Sous des hypothèses de concavité de l'hamiltonien associé au problème et de non dégénérescence de sa matrice hessienne, on sait qu'à $\bar{x}$ correspond un équilibre du système hamiltonien modifié, qui est un point selle avec des variétés stable et instable de même dimension un. Ainsi génériquement pour toute condition initiale x_0 suffisament voisine de $\bar{x}$ on peut se placer sur la variété stable et obtenir une unique trajectoire optimale qui converge asymptotiquement vers l'équilibre $\bar{x}$. Cette propriété de stabilité asymptotique des trajectoires optimales vers une solution stationnaire optimale est appelée théorème de l'autoroute. Il existe une vaste littérature sur ce sujet, en particulier en économie et plus précisement dans les théories macroéconomiques de croissance optimale [13,7,5,6].

En horizon fini avec extrémités fixées d'autre part, il existe des travaux qui caractérisent des situations où la solution optimale reste un temps aussi grand que possible dans le voisinage d'un état stationnaire optimal ; cette propriété est appelée autoroute de type entonnoir (« funnel turnpike ») [10].

(2) Lorsque l'équation d'Euler est singulière, c'est à dire qu'elle dégénére en un système algébrique qui possède une ou plusieurs solution(s) dépendant ou non du temps, il n'existe que peu de résultats. A notre connaissance ceux-ci sont donnés dans le cas scalaire et établissent des conditions suffisantes d'optimalité en suivant la méthode proposée par Miele [12], qui utilise le théorème de Green.

Plus précisement, dans cette littérature on fait en général l'hypothèse que l'intégrand est linéaire en la vitesse et que celle-ci est contrainte par une inégalité du type $\alpha \leqslant \dot{x}(t) \leqslant \beta$ pour tout t. Supposons que l'équation d'Euler possède une unique solution constante $\bar{x}$. Ainsi si on considère le problème d'optimisation en horizon infini avec $\bar{x}$ comme condition initiale, sous des hypothèses standard il est optimal de rester en $\bar{x}$ (l'autoroute). Le problème se pose alors de déterminer si par une condition initiale $x_0 \neq \bar{x}$ il passe une solution optimale et de la déterminer le cas échéant. On montre que les trajectoires qui rejoignent l'arc singulier $\bar{x}$ en temps minimum et que l'on appelle MRAP (most rapid approach path), sont optimales [11]. Cette propriété est appelée théorème de l'autoroute exact par opposition à la précedente propriété d'autoroute qui est qualifiée d'asymptotique.

En horizon fini avec extrémités fixées, on trouve des résultats voisins qui établissent des conditions suffisantes d'optimalité d'une MRAP, i.e. l'arc joignant les extrémités tout en restant le plus longtemps possible sur l'arc singulier. Dans les années 1950, de tels travaux ont été développés en ingénierie, en particulier en aéronautique [2] ; on rencontre aussi ce type de modèles en économie de l'environnement, dans les problèmes de pêche en particulier [8].

Dans cette Note nous nous intéressons au cas singulier scalaire, avec un intégrand $l(x, y)$ linéaire en y sous contrainte $y \in [\alpha, \beta]$. Nous proposons une nouvelle condition nécessaire et suffisante d'optimalité des MRAP, qui repose sur des hypothèses de croissance de l'intégrand plus générales que celles habituellement faites lorsqu'on travaille avec la classe des trajectoires absolument continues. Notre approche est basée sur une caractérisation de la fonction valeur, en termes de solution de viscosité [1] d'une équation de Hamilton–Jacobi. Cette approche, qui n'a pas été utilisée à notre connaissance pour étudier des problèmes de ce type, permet en outre de donner des résultats en présence d'une multiplicité d'arcs singuliers et d'aborder des situations plus générales où il y a coexistence de plusieurs autoroutes (cf. exemple ci-dessous).

2. Le problème

Etant donné l'ensemble des courbes admissibles en x_0 définies par

$$Adm_{x_0} = \left\{ x(\cdot) : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ AC,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(t) \in [-1, 1] \text{ p.p.} \right\}$$

on considère la fonctionnelle suivante lorsque l'intégrale imprope converge :

$$J\big(x(\cdot)\big) = \int_0^{\to\infty} \mathrm{e}^{-\delta t}\big[A\big(x(t)\big) + B\big(x(t)\big)\dot{x}(t)\big]\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

On s'interesse alors à l'existence et à la caractérisation d'un maximum de la fonctionnelle J sur Adm_{x_0}. L'équation d'Euler associée à ce problème de calcul des variations s'écrit :

$$A'(x) + \delta B(x) = 0. \tag{2}$$

On fait les hypothèses suivantes de régularité et de croissance

(H_1) $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$ sont respectivement deux fois et une fois différentiables.

(H_2) Il existe deux nombres réels $k > 0$ et $\gamma < \delta$ tels que, pour tout x

$$\max\big(\big|A(x)\big|, \big|A'(x) + \delta B(x)\big|, \big|A''(x) + \delta B'(x)\big|\big) \leqslant k\,\mathrm{e}^{\gamma|x|}.$$

On note V la fonction valeur du problème :

$$V(x_0) = \sup_{x(\cdot)\in Adm_{x_0}} J\big(x(\cdot)\big). \tag{3}$$

3. L'équation d'Hamilton–Jacobi

Le choix d'une classe de fonctions pour obtenir l'unicité des solutions (généralisées) de l'équation d'Hamilton–Jacobi en horizon infini, est une difficulté bien connue des E.D.P. d'ordre 1 sur des ouverts non bornés [1]. C'est pourquoi nous considérons une transformée de la fonction V dans la classe des fonctions B.U.C. (bornées et uniformément continues) :

PROPOSITION 3.1. – *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *la fonction Z définie par*

$$Z(x) = \mathrm{e}^{-\eta\sqrt{x^2+1}}\left(V(x) - \frac{A(x)}{\delta}\right)$$

où η vérifie $\gamma < \eta < \delta$, est l'unique solution de viscosité dans la classe B.U.C. de l'équation

$$\delta Z(x) - \left|Z'(x) + \eta\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}Z(x) + \frac{\mathrm{e}^{-\eta\sqrt{x^2+1}}}{\delta}\big(A'(x) + \delta B(x)\big)\right| = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

4. Propriété de l'autoroute

Nous appelons $MRAP(x_0, \bar{x})$ la trajectoire admissible qui joint x_0 à $\bar{x}$ au plus vite, et définissons la fonction de deux variables :

$$S(x_0, \bar{x}) = \int_{x_0}^{\bar{x}} \big(A'(y) + \delta B(y)\big)\,\mathrm{e}^{-\delta|x_0 - y|}\,\mathrm{d}y.$$

PROPOSITION 4.1. – *Supposons les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *vérifiées. Soit $\overline{X}$ un ensemble fini de nombres réels $\bar{x}$ solutions de l'équation d'Euler* (2). *Les trajectoires $MRAP(x_0, \bar{x})$ avec $\bar{x} \in \arg\max_{\bar{\xi}\in\overline{X}} S(x_0, \bar{\xi})$ sont optimales pour toute condition initiale x_0, si et seulement si la condition suivante est vérifiée* :

$$T(x) = \max_{\bar{\xi}\in\overline{X}} S(x, \bar{\xi}) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

La fonction valeur s'écrit alors $V(x) = (A(x) + T(x))/\delta$.

Dans le cas où $\overline{X}$ est réduit à un singleton, on généralise ainsi le résultat, obtenu classiquement par le théorème de Green [12,2,11], qui garantit l'optimalité des $MRAP(x_0, \bar{x})$ pour tout x_0, $\bar{x}$ étant l'unique solution de l'équation d'Euler (2), sous la condition suffisante :

$$(\bar{x} - x)\big(A'(x) + \delta B(x)\big) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

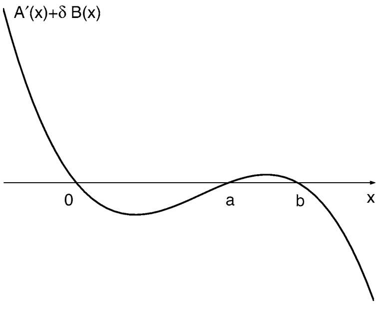

Figure 1. – Graphe de la fonction $x \to A'(x) + \delta B(x)$.

Dans l'exemple suivant, l'équation d'Euler admet plusieurs solutions stationnaires $\bar{x}$ dont aucune ne satisfait la condition (6), alors que grâce à (5), on démontre l'optimalité de $MRAP(x_0, \bar{x})$ vers un ou plusieurs $\bar{x}$.

Exemple 1. – Pour $0 < a < b$, on considère le problème de calcul des variations suivant

$$\max_{x(\cdot)} \int_0^{\to\infty} \mathrm{e}^{-t} x^2(t) \left[2\dot{x}(t)\big(a + b - x(t)\big) - ab\right] \mathrm{d}t \quad \text{avec } \dot{x}(t) \in [-1, 1].$$

L'équation d'Euler qui lui est associée

$$A'(x) + \delta B(x) = -2x(a - x)(b - x) = 0$$

possède trois équilibres. Seuls les deux équilibres $\bar{x} = 0, b$ vérifient, et de manière seulement locale, la condition (6) (voir Fig. 1). En appliquant la Proposition 4.1, on montre que, selon les valeurs de a et b, ou bien $MRAP(x_0, 0)$ ou $MRAP(x_0, b)$ est optimal pour toute condition initiale x_0, ou bien il existe $x^* \in]0, b[$ tel que $MRAP(x_0, 0)$ (resp. $MRAP(x_0, b)$) est optimal pour $x_0 \leqslant x^*$ (resp. $x_0 \geqslant x^*$).

Références bibliographiques

[1] G. Barles, Solutions de viscosité des équations de Hamilton–Jacobi, Springer-Verlag, Paris, 1994.
[2] D.J. Bell, D.H. Jacobson, Singular Optimal Control Problems, Academic Press, London, 1975.
[3] J. Blot, P. Cartigny, Bounded solutions and oscillations of concave Lagrangian systems in presence of a discount rate, J. Anal. Appl. 14 (4) (1995) 731–750.
[4] J. Blot, P. Cartigny, Optimality in infinite horizon variational problems under signs conditions, J. Optim. Theory Appl. 106 (2) (2000) 411–419.
[5] D.A. Carlson, A. Haurie, A. Leizarowitch, Infinite Horizon Optimal Control, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
[6] P. Cartigny, Stabilité des solutions stationnaires et oscillations dans un problème variationnel : approche Lagrangienne, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 318 (1994) 869–872.
[7] D. Cass, K. Shell, The Hamiltonian Approach to Dynamic Economics, Academic Press, New York, 1976.
[8] C.W. Clark, Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources, Wiley, New York, 1976.
[9] I. Ekeland, Some Variational Problems Arising from Mathematical Economics, in: Lecture Notes in Math., Vol. 1330, Springer-Verlag, 1986.
[10] C.D. Feinstein, S.S. Oren, A funnel turnpike theorem for optimal growth problems with discounting, J. Economic Dynamics Control 9 (1985) 25–39.
[11] R.F. Hartl, G. Feichtinger, A new sufficient condition for most rapid approach paths, J. Optim. Theory Appl. 54 (2) (1987).
[12] A. Miele, Extremization of Linear Integrals by Green's Theorem, Optimization Technics, G. Leitmann (Ed.), Academic Press, New York, 1962, pp. 69–98.
[13] R.T. Rockafellar, Saddle points of Hamiltonian systems in convex Lagrange problems having nonzero discount rate, J. Economic Theory 12 (1976) 71–113.