C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 931–934

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*
(Topologie différentielle/*Differential Topology*)

Groupes d'automorphismes et plongements symplectiques de boules dans les variétés rationnelles

François Lalonde [a], Martin Pinsonnault [b]

[a] Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal, CP 6128 succ Centre-Ville, Montréal QC H3C 3J7, Canada

[b] Département de mathématiques, Université du Québec à Montréal, CP 8888 succ Centre-Ville, Montréal QC H3C 3P8, Canada

Reçu le 12 septembre 2002 ; accepté après révision le 8 octobre 2002

Note présentée par Michèle Vergne.

Résumé Nous étudions l'espace $\mathrm{Pl}(c,\lambda)$ des plongements symplectiques de la boule fermée $B^4(c) \subset \mathbf{R}^4$ de capacité c dans $(S^2 \times S^2, (1+\lambda)\omega_{\mathrm{st}} \oplus \omega_{\mathrm{st}})$. Lorsque $\lambda = 0$, nous montrons que cet espace se comporte comme les plongements différentiables ordinaires et a donc un type d'homotopie indépendant de la valeur de c ; nous montrons ensuite que si $\lambda > 0$ l'application de restriction $\mathrm{Pl}(c',\lambda) \to \mathrm{Pl}(c,\lambda)$ cesse d'être une équivalence d'homotopie quand c et c' se trouvent de part et d'autre de la valeur λ. ***Pour citer cet article : F. Lalonde, M. Pinsonnault, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 931–934.***

Automorphism groups and embeddings of symplectic balls into rational manifolds

Abstract We study the space $\mathrm{Pl}(c,\lambda)$ of symplectic embeddings of the closed ball $B^4(c) \subset \mathbf{R}^4$ of capacity c in $(S^2 \times S^2, (1+\lambda)\omega_{\mathrm{st}} \oplus \omega_{\mathrm{st}})$. When $\lambda = 0$, we show that this space behaves like the space of ordinary differential embeddings and hence that its homotopy type does not depend on c. When $\lambda > 0$, we prove that the restriction $\mathrm{Pl}(c',\lambda) \to \mathrm{Pl}(c,\lambda)$ is no longer a homotopy equivalence when c and c' lie on different sides of the value λ. ***To cite this article: F. Lalonde, M. Pinsonnault, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 931–934.***

1. Enoncé des résultats

Dans cette Note, nous étudions le type d'homotopie de l'espace $\mathrm{Pl}(c,\lambda)$, muni de la topologie C^∞, des plongements symplectiques de la boule fermée $B^4(c)$ de $\mathbf{R}^4$ de rayon r (de capacité $c = \pi r^2$) dans la variété symplectique réglée $M_\lambda = (M, \omega_\lambda) = (S^2 \times S^2, (1+\lambda)\omega_{\mathrm{st}} \oplus \omega_{\mathrm{st}})$, où ω_{st} est la forme symplectique de S^2 d'aire 1 et où λ est un nombre réel $\geqslant 0$. Il est connu que, à une constante près, toute forme symplectique sur $S^2 \times S^2$ est difféomorphe à une telle forme ω_λ, $\lambda \geqslant 0$ (voir [4]), et que l'ensemble des plongements symplectiques de $B^4(c)$ dans (M, ω_λ) est non-vide si et seulement si $c < 1$. McDuff a montré dans [6] que cet espace est connexe quelles que soient les valeurs de c et λ. Avant d'énoncer nos résultats, considérons la fibration

$$\mathrm{Symp}\big(B^4(c)\big) \hookrightarrow \mathrm{Pl}(c,\lambda) \longrightarrow \Im\mathrm{Pl}(c,\lambda), \tag{1}$$

Adresses e-mail : lalonde@dms.umontreal.ca (F. Lalonde); pinso@math.uqam.ca (M. Pinsonnault).

S1631-073X(02)02583-9/FLA

où $\mathrm{Symp}(B^4(c))$ est le groupe des difféomorphismes symplectiques de la boule fermée de capacité c, sans contrainte sur le bord, et où $\Im\mathrm{Pl}(c,\lambda)$, inclus dans l'ensemble des parties de M, est l'ensemble des images des applications appartenant à $\mathrm{Pl}(c,\lambda)$, c'est-à-dire des boules non-paramétrées de capacité c de M_λ. Puisque le type d'homotopie du groupe $\mathrm{Symp}(B^4(c))$ ne dépend pas de c, il est équivalent d'étudier l'un ou l'autre des espaces $\mathrm{Pl}(c,\lambda)$ ou $\Im\mathrm{Pl}(c,\lambda)$. Notons ι_c, $c<1$, le plongement standard de $B^4(c)$ dans M_λ. Les résultats de cette Note sont basés sur l'étude de la fibration

$$\mathrm{Symp}^{B_c}(M_\lambda) \hookrightarrow \mathrm{Symp}(M_\lambda) \longrightarrow \Im\mathrm{Pl}(c,\lambda), \tag{2}$$

où l'espace du milieu est le groupe de tous les difféomorphismes symplectiques de M_λ, celui de gauche est le sous-groupe des difféomorphismes préservant l'image $B_c \subset M$ de ι_c, et l'application de droite associe à ϕ l'image de sa restriction à B_c. Notant $\mathrm{Symp}(\widetilde{M}_{c,\lambda})$ le groupe des difféomorphismes symplectiques de l'éclaté $\widetilde{M}_{c,\lambda}$ en ι_c, on va montrer plus bas que $\mathrm{Symp}^{B_c}(M_\lambda)$ est homotopiquement équivalent au sous-groupe $\mathrm{Symp}^E(\widetilde{M}_{c,\lambda}) \subset \mathrm{Symp}(\widetilde{M}_{c,\lambda})$ des difféomorphismes qui préservent la fibre exceptionnelle E. Or il n'est pas difficile de montrer que le second se rétracte sur le premier. On a donc une fibration homotopique

$$\mathrm{Symp}(\widetilde{M}_{c,\lambda}) \hookrightarrow \mathrm{Symp}(M_\lambda) \longrightarrow \Im\mathrm{Pl}(c,\lambda) \tag{3}$$

et le calcul du type d'homotopie de $\Im\mathrm{Pl}(c,\lambda)$ (sa cohomologie rationnelle par exemple) se déduit de calculs correspondants dans les espaces $\mathrm{Symp}(\widetilde{M}_{c,\lambda})$ et $\mathrm{Symp}(M_\lambda)$.

Dans cet article, on s'intéresse au cas $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ (voir [8] pour les valeurs $\lambda > 1$). Commençons par le cas $\lambda = 0$. Il est alors plus commode de remplacer la suite (3) par la suite :

$$\mathrm{Symp}_{\mathrm{ht}}(\widetilde{M}_{c,\lambda}) \hookrightarrow \mathrm{Symp}_{\mathrm{ht}}(M_\lambda) \longrightarrow \Im\mathrm{Pl}(c,\lambda), \tag{4}$$

où l'indice ht (« homologiquement trivial ») signifie la restriction aux sous-groupes qui agissent trivialement en homologie. On vérifie aisément que, comme dans la suite (3), la première flèche est encore l'inclusion de la fibre homotopique de la seconde flèche. Gromov a démontré que le type d'homotopie de $\mathrm{Symp}_{\mathrm{ht}}(M_{\lambda=0})$ est celui de $\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)$. Nous allons d'abord montrer :

THÉORÈME 1.1. – $\mathrm{Symp}_{\mathrm{ht}}(\widetilde{M}_{c,\lambda=0})$ *a le type d'homotopie du tore* T^2.

On déduit donc de ce qui précède :

THÉORÈME 1.2. – *Quand* λ *est égal à* 0, *l'espace* $\Im\mathrm{Pl}(c,\lambda=0)$ *se rétracte sur* $S^2\times S^2$, *quelle que soit la valeur de* $c \in (0,1)$. *Autrement dit,* $\mathrm{Pl}(c,\lambda=0)$ *se rétracte sur l'espace*

$$\mathrm{SFr}(M) = \bigl\{(p,\beta) \mid p \in M \text{ et } \beta \text{ est un repère symplectique en } p\bigr\}$$

des repères symplectiques de $M_{\lambda=0}$.

Supposons maintenant que $0 < \lambda \leqslant 1$. Dans ce cas, Abreu est parvenu dans [1] à calculer la cohomologie rationnelle de $\mathrm{Symp}(M_\lambda)$:

THÉORÈME 1.3 ([1]). – *Quand* $\lambda \in (0,1]$, *l'anneau de cohomologie rationnelle du groupe* $\mathrm{Symp}(M_\lambda)$ *est isomorphe à*

$$\Lambda(\alpha,\beta_1,\beta_2)\otimes S(v),$$

où le premier facteur est l'algèbre extérieure libre sur trois générateurs de degré $1,3,3$ *respectivement et où le second facteur est l'algèbre symétrique sur un seul générateur de degré* 4.

Comme l'éclaté $\widetilde{M}_{c,\lambda}$ est encore une variété rationnelle, des méthodes pseudoholomorphes semblables fonctionnent et on obtient :

THÉORÈME 1.4. – *Quand* $\lambda \in (0,1]$, *l'anneau de cohomologie rationnelle du groupe* $\mathrm{Symp}(\widetilde{M}_{c,\lambda})$ *est isomorphe à*

$$\Lambda(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\otimes S(w),$$

où le premier facteur est l'algèbre extérieure libre sur trois générateurs de degré 1 *et où le second facteur est l'algèbre symétrique sur un seul générateur qui est de degré* 4 *si* $0 < c < \lambda$ *et de degré* 2 *si* $\lambda \leqslant c < 1$.

La preuve du Théorème 1.4, dont l'idée générale a été introduite par Gromov dans [3] et développée par Abreu–McDuff dans [2], s'appuie sur l'analyse d'une stratification de l'espace des structures presque complexes compatibles avec la forme symplectique $\widetilde{\omega}_{c,\lambda}$ et sur laquelle les groupes de difféomorphismes symplectiques agissent. Les strates sont toutes des variétés lisses de dimension infinie mais de codimension finie. Elles sont en correspondance avec les structures toriques sur $\widetilde{M}_{c,\lambda}$, chacune de ces strates ayant le type d'homotopie d'un quotient de $\mathrm{Symp}(\widetilde{M}_{c,\lambda})$ par un tore agissant de façon hamiltonienne. Comme d'une part ces actions toriques sont bien comprises et que d'autre part, la façon dont les strates s'assemblent l'est aussi (grâce au travail de Abreu et plus généralement à celui de McDuff dans [7]), on en tire une méthode explicite du calcul de la cohomologie rationnelle de $\mathrm{Symp}(\widetilde{M}_{c,\lambda})$. Il se trouve que la stratification de l'espace des structures J-holomorphes, servant à calculer la cohomologie du groupe $\mathrm{Symp}(\widetilde{M}_{c,\lambda})$, change quand c passe la valeur λ (qui est la différence entre les aires de la base et de la fibre de M_λ), mais que ce passage est évidemment sans effet sur la stratification servant à calculer $\mathrm{Symp}(M_\lambda)$. On peut donc conclure en se servant de la suite homotopique (3) que :

COROLLAIRE 1.5. – *Quand* $\lambda \in (0, 1]$, *l'application de restriction* $\mathrm{Pl}(c', \lambda) \to \mathrm{Pl}(c, \lambda)$ *cesse d'être une équivalence d'homotopie quand* $c < \lambda$ *et* $c' \geqslant \lambda$.

Les détails des résultats annoncés ici se trouvent dans [5] où l'on démontre également que le changement homotopique du corollaire précédent est en fait plus fort que ce qui est décrit ici – en effet le type d'homotopie de l'espace $\mathrm{Pl}(c, \lambda)$ change quand c traverse la valeur λ – et ne se produit qu'à la valeur $c = \lambda$:

THÉORÈME 1.6 ([5]). – *Soit* $0 < \lambda \leqslant 1$ *et* M_λ *la variété symplectique correspondante. L'application de restriction* $\mathrm{Pl}(c', \lambda) \to \mathrm{Pl}(c, \lambda)$ *est une équivalence d'homotopie pour toute paire* (c, c') *vérifiant* $0 < c \leqslant c' < \lambda$ *ou* $\lambda \leqslant c \leqslant c' < 1$.

Les cas des plongements de boules dans $M = \mathbf{CP}^2$ se traite de la même manière, tout comme celui des autres variétés rationnelles réglées M_λ avec $\lambda > 1$, mais conduisent à des calculs plus compliqués [8].

2. Aperçu des démonstrations

LEMME 2.1. – *Le groupe* $\mathrm{Symp}^{B_c}(M_\lambda)$ *est homotopiquement équivalent au sous-groupe* G *des difféomorphismes symplectiques de l'éclaté* $\widetilde{M}_{c,\lambda}$ *en* ι_c *qui préservent la fibre exceptionnelle* E.

Démonstration. – En utilisant le fait que le groupe des symplectomorphismes à supports compacts de la boule $B^4(c)$ est contractile [3], on montre que le groupe $\mathrm{Symp}(B^4(c))$ se rétracte sur $U(2)$. Par conséquent, le groupe $\mathrm{Symp}^{B_c}(M_\lambda)$ se rétracte sur le sous-groupe formé des symplectomorphismes qui agissent linéairement sur $\mathrm{im}(\iota_c)$. Or ceux-ci se relèvent continuement en des difféomorphismes de l'éclaté préservant E. La réciproque est semblable. □

Remarque. – La preuve du dernier lemme est aussi valable quand on se restreint aux sous-groupes qui agissent trivialement en homologie.

Aperçu de la preuve du Théorème 1.1. – Dans $\widetilde{M}$, soient $B, F, E \in H_2(\widetilde{M}, \mathbf{Z})$ les classes correspondant respectivement aux premier et second facteurs de $S^2 \times S^2$ et à la fibre exceptionnelle obtenue par éclatement de la boule B_c. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de toutes les configurations formées de trois 2-sphères symplectiques plongées (A_1, A_2, A_3) dans les classes $(B - E, E, F - E)$, se coupant positivement et transversalement. Comme λ est nul, les deux facteurs B et F ont même aire, et on montre aisément qu'aucune des classes $B - E$, E, $F - E$ ne peut alors dégénérer : elles sont donc représentées par des courbes $\tilde{J}$-holomorphes de façon unique pour chaque $\tilde{J} \in \tilde{\mathcal{J}}$, l'espace de structures presques complexes compatibles avec $\widetilde{\omega}$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ et $\tilde{\mathcal{J}}$ ont le même type d'homotopie, donc que $\mathcal{C}$ est contractile. On montre alors que $\mathcal{C}$ se rétracte sur le sous-espace $\mathcal{C}^0$ des configurations dont les courbes constituantes s'intersectent orthogonalement. Or l'action de $\mathrm{Symp}_{\mathrm{ht}}(\widetilde{M}_{c,\lambda=0})$ sur $\mathcal{C}^0$ est transitive. Pour achever la preuve, il faut voir que le stabilisateur H de cette action a le type d'homotopie d'un tore, ce qu'on fait par étapes successives : à homotopie près, on peut supposer que l'action des éléments du groupe est linéaire sur chaque composante S^2 de la configuration (et donc agit comme une rotation) et se réduit également à S^1 dans chaque fibre du fibré normal. La fibration $H' \to H \xrightarrow{\pi} S^1 \times S^1$ qui associe à tout ϕ sa restriction aux surfaces A_1 et A_3, a pour fibre le sous-groupe H' qui fixe point par point A_1 et A_3. A homotopie près, l'action de chaque élément de H' sur le fibré normal de A_i, $i = 1, 3$, est déterminée par son action dans la fibre normale au point $A_i \cap A_2$, donc par multiplication complexe par un nombre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i}$, $i = 1, 3$, ne dépendant que de i. On montre ensuite que la projection $H' \to S^1$ qui associe à ϕ sa restriction à A_2 est une fibration de fibre $\mathbf{Z}$, qui représente le nombre de torsion de la différentielle dans la direction normale le long d'un méridien de A_2 joignant les deux points fixes de l'action. Ceci est une conséquence du fait que les difféomorphismes symplectiques qui sont l'identité dans un voisinage de la configuration forment un groupe contractile (ceci se déduit du théorème de Gromov sur la contractilité des difféomorphismes symplectiques à supports compacts de $\mathbf{R}^4$ et de l'existence d'un champ de Liouville contractant $\widetilde{M} - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ dans une boule arbitrairement petite). Il n'est alors pas difficile de conclure que la suite $\mathbf{Z} \hookrightarrow H' \to S^1$ est homotopiquement la même que $\mathbf{Z} \to \mathbf{R} \to S^1$, donc que le sous-groupe H' est contractile. $\square$

Le Théorème 1.2 est maintenant un corollaire immédiat de ce qui précède : en effet, dans la preuve ci-dessus, la fibration $H' \to H \xrightarrow{\pi} S^1 \times S^1$ a une fibre contractile et admet donc une section, où la base est vue comme l'action torique standard de rotation de chacun des facteurs. Ceci montre que $\mathrm{Symp}_{\mathrm{ht}}(\widetilde{M}_{c,\lambda=0})$ se rétracte sur cette action T^2. La suite (4) est donc homotopiquement équivalente à la suite

$$S^1 \times S^1 \hookrightarrow \mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3) \to S^2 \times S^2.$$

Les Théorèmes 1.4 et 1.6 font appel à des développements trop longs pour être expliqués ici – voir [5]. Il est très facile de voir, en revanche, que le premier de ces théorèmes permet d'établir le Corollaire 1.5 : en effet, si l'application de restriction $\mathrm{Pl}(c', \lambda) \to \mathrm{Pl}(c, \lambda)$ induisait une équivalence d'homotopie quand $c < \lambda$ et $c' \geqslant \lambda$, on en déduirait par la suite (1) l'existence d'une équivalence d'homotopie entre $\Im\mathrm{Pl}(c', \lambda)$ et $\Im\mathrm{Pl}(c, \lambda)$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Symp}(\widetilde{M}_{c',\lambda}) & \hookrightarrow & \mathrm{Symp}(M_\lambda) & \xrightarrow{\rho'} & \Im\mathrm{Pl}(c', \lambda), \\
 & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \\
\mathrm{Symp}(\widetilde{M}_{c,\lambda}) & \hookrightarrow & \mathrm{Symp}(M_\lambda) & \xrightarrow{\rho} & \Im\mathrm{Pl}(c, \lambda)
\end{array}$$

commuterait à homotopie près. Par conséquent les fibres homotopiques de ρ et de ρ' coincideraient, c'est-à-dire $\mathrm{Symp}(\widetilde{M}_{c',\lambda})$ et $\mathrm{Symp}(\widetilde{M}_{c,\lambda})$ auraient le même type d'homotopie, ce qui contredirait le Théorème 1.4.

Remerciements. F. Lalonde est soutenu en partie par les subventions CRSNG OGP 0092913 et FCAR ER-1199.

Références bibliographiques

[1] M. Abreu, Topology of symplectomorphism groups of $S^2 \times S^2$, Invent. Math. 131 (1998) 1–23.
[2] M. Abreu, D. McDuff, Topology of symplectomorphism groups of rational ruled surfaces, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000) 971–1009.
[3] M. Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. Math. 82 (1985) 307–347.
[4] F. Lalonde, D. McDuff, J-curves and the classification of rational and ruled symplectic 4-manifolds, in: Contact and Symplectic Geometry, in: Publ. Newton Inst., Vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, pp. 3–42.
[5] F. Lalonde, M. Pinsonnault, The topology of the space of symplectic balls in rational 4-manifolds, Preprint math.SG/0207096, 33 p.
[6] D. McDuff, Blow ups and symplectic embeddings in dimension 4, Topology 30 (1991) 409–421.
[7] D. McDuff, Almost complex structures on $S^2 \times S^2$, Duke Math. J. 101 (2000) 135–177.
[8] M. Pinsonnault, En préparation.