

# Groupes de Neretin et propriété (T) de Kazhdan

Andrés Navas

UMPA, ENS-Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France

Reçu le 4 septembre 2002 ; accepté le 12 septembre 2002

Note présentée par Étienne Ghys.

---

## Résumé

On considère le groupe de Neretin des extensions au bord des isométries par morceaux d'un arbre simplicial homogène. On démontre que les sous-groupes de ce groupe qui satisfont la propriété (T) fixent (à indice fini près) un nombre fini de boules du bord de l'arbre, agissant isométriquement sur chacune d'elles. *Pour citer cet article : A. Navas, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 789–792.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Neretin's groups and Kazhdan's property (T)

## Abstract

We consider Neretin's group of boundary extensions of piecewise isometries of a homogeneous simplicial tree. We prove that if a subgroup  $\Gamma$  of this group has Kazhdan's property (T), then a finite index subgroup of  $\Gamma$  stabilizes a finite collection of balls of the boundary of the tree, acting isometrically on each of them. *To cite this article: A. Navas, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 789–792.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

1. Pour tout entier  $p \geq 2$  on note  $\mathcal{N}^p$  le groupe des extensions au bord des isométries par morceaux (partiellement définies) de l'arbre simplicial homogène de degré  $p + 1$  (voir le §3 pour les détails). Ce groupe a été introduit par Y. Neretin dans [8] et a été étudié dans [4,5,8] et [9]. Dans le cas où  $p$  est un nombre premier, il peut être considéré comme un analogue  $p$ -adique du groupe des difféomorphismes du cercle. Le résultat principal de cette Note est le suivant (voir le §2 pour un rappel sur la propriété (T) de Kazhdan).

THÉORÈME. – *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe du groupe de Neretin  $\mathcal{N}^p$ . Si  $\Gamma$  a la propriété (T) de Kazhdan, alors  $\Gamma$  fixe, à indice fini près, un nombre fini de boules du bord de l'arbre, et agit isométriquement sur chacune de ces boules.*

Si on pense au groupe  $\mathcal{N}^p$  comme un analogue du groupe des difféomorphismes du cercle, ce théorème est à rapprocher du fait que dans le groupe  $\text{Diff}_+^{1+\alpha}(S^1)$ ,  $\alpha > 1/2$ , tout sous-groupe ayant la propriété (T) est topologiquement conjugué à un groupe compact de rotations (i.e.  $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ ) ou un sous-groupe cyclique fini. D'autre part, si on voit  $\mathcal{N}^p$  comme un groupe qui contient les (extensions au bord des) isométries d'un arbre, le résultat peut être considéré comme une extension au groupe de Neretin du théorème d'Alperin et Watatani, selon lequel pour tout sous-groupe ayant la propriété (T) du groupe des isométries d'un arbre (simplicial ou réel), il existe un point fixe.

---

Adresse e-mail : [anavas@umpa.ens-lyon.fr](mailto:anavas@umpa.ens-lyon.fr) (A. Navas).

La démonstration est inspirée de [1], où D. Farley démontre que les groupes de Thompson  $F$ ,  $G$  et  $V$ , sont  $a$ -( $T$ )-moyennables. Nous adaptons la construction de [1] au cas des groupes de Neretin, et nous montrons ainsi que les éléments d’un sous-groupe de  $\mathcal{N}^p$  qui possède la propriété ( $T$ ) sont des extensions au bord de transformations « uniformément partiellement définies » sur  $\mathcal{T}^p$ . Nous proposons d’autre part une preuve différente du fait (plus faible) que  $\mathcal{N}^p$  contient « très peu de sous-groupes » avec la propriété ( $T$ ) (voir le §6 et le §7 pour les détails). Cette démonstration se fait en adaptant une technique développée dans [7] qui consiste à considérer la non préservation du courant géodésique de Liouville comme un cocycle. Remarquons en passant que cette dernière méthode permet de donner une nouvelle preuve du fait que les groupes  $G$  et  $V$  de Thompson n’ont pas la propriété ( $T$ ) de Kazhdan (voir [1,7] et [10]).

2. Soit  $\Gamma$  un groupe topologique et  $\theta : \Gamma \rightarrow U(\mathcal{L})$  une représentation linéaire unitaire de  $\Gamma$  sur un espace de Hilbert réel  $\mathcal{L}$ . On dit qu’une application continue  $c : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}$  est un *cocycle* si  $c(gh) = \theta(g)c(h) + c(g)$  pour tout  $g, h \in \Gamma$ . On dit que  $c$  est un *cobord* s’il existe  $K \in \mathcal{L}$  tel que  $c(g) = \theta(g)K - K$  pour tout  $g \in \Gamma$ .

DÉFINITION. – Le groupe  $\Gamma$  possède la *propriété ( $T$ ) de Kazhdan* si pour toute représentation unitaire  $\theta$  de  $\Gamma$ , tout cocycle est un cobord.

Une condition équivalente consiste en ce que l’application  $g \mapsto \|c(g)\|$  soit uniformément bornée pour tout cocycle  $c$  associé à une représentation unitaire. En effet, si  $c(g) = \theta(g)K - K$  alors  $\|c(g)\| \leq 2\|K\|$  (pour tout  $g \in \Gamma$ ). Pour l’autre implication, ainsi que pour des exemples de groupes qui ont la propriété ( $T$ ), nous renvoyons le lecteur à [2].

3. On note  $\mathcal{T}^p$  l’arbre homogène de valence  $p + 1$  sur chaque sommet. Sur cet arbre on considère la distance  $\text{dist}$  qui est maximale pour la propriété que chaque arête (fermée) soit isométrique à l’intervalle  $[0, 1]$ . On fixe un point  $\sigma$  de  $\mathcal{T}^p$ , qu’on appellera l’origine. Le bord  $\partial\mathcal{T}^p$  de l’arbre est muni d’une métrique : pour  $x, y \in \partial\mathcal{T}^p$  on définit sa distance par  $\text{dist}(x, y) = p^{-n}$ , où  $n$  est la distance  $\text{dist}$  entre  $\sigma$  et la géodésique qui relie  $x$  et  $y$ . Le bord de  $\mathcal{T}^p$  porte aussi une mesure  $\mu$  de masse finie, à savoir celle pour laquelle la mesure de toute boule de rayon  $p^{-n}$ ,  $n \geq 1$ , est égale à  $p^{-n}$ . Pour une application  $g$  de  $\partial\mathcal{T}^p$  sur lui-même, on notera  $g'$  la dérivée de Radon–Nikodym de  $g$  par rapport à  $\mu$  (lorsque elle est bien définie).

Un sous-arbre de  $\mathcal{T}^p$  est *complet* s’il est connexe, compact, et chaque fois que deux arêtes de ce sous-arbre ont un sommet en commun, toutes les arêtes qui contiennent ce sommet sont contenues dans le sous-arbre. La fermeture du complémentaire d’un sous-arbre complet est la réunion d’un nombre fini d’arbres enracinés.

Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  sont des sous-arbres complets de  $\mathcal{T}^p$ , on note  $\mathcal{N}^p(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  l’ensemble des transformations bijectives de  $\overline{\mathcal{T}^p - \mathcal{A}}$  sur  $\overline{\mathcal{T}^p - \mathcal{B}}$  qui envoient chaque composante connexe de  $\overline{\mathcal{T}^p - \mathcal{A}}$  isométriquement sur une composante connexe de  $\overline{\mathcal{T}^p - \mathcal{B}}$ . Il est facile de voir que si cet ensemble est non vide alors  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  ont le même nombre de sommets. Si  $g \in \mathcal{N}^p(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  alors  $g$  induit un homéomorphisme de  $\partial\mathcal{T}^p$  sur lui-même, qu’on désignera encore par  $g$ .

DÉFINITION. – On appelle le *groupe de Neretin*  $\mathcal{N}^p$  le groupe des homéomorphismes de  $\partial\mathcal{T}^p$  induits par des éléments dans  $\mathcal{N}^p(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des sous-arbres complets quelconques de  $\mathcal{T}^p$ .

Il est important de remarquer que si  $g_1 \in \mathcal{N}^p(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  et  $g_2 \in \mathcal{N}^p(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$  représentent le même élément de  $\mathcal{N}^p$ , alors ils coïncident sur l’intersection de leurs domaines de définition. Un représentant  $\tilde{g} \in \mathcal{N}^p(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  de  $g \in \mathcal{N}^p$  sera appelé *maximal* si son domaine de définition contient le domaine de tout autre représentant de  $g$ . Il n’est pas difficile de se convaincre de l’existence d’un unique représentant maximal pour chaque élément de  $\mathcal{N}^p$ . Pour  $g \in \mathcal{N}^p$  désignons par  $\mathcal{A}_g$  (resp.  $\mathcal{B}_g$ ) la fermeture du complémentaire du domaine de définition de  $\tilde{g}$  (resp. de  $\tilde{g}^{-1}$ ). Notons que  $\mathcal{A}_g = \mathcal{B}_{g^{-1}}$ . Enfin, le groupe  $\text{Isom}(\mathcal{T}^p)$  des (extensions au bord des) isométries de  $\mathcal{T}^p$  est un sous-groupe de  $\mathcal{N}^p$ . Un élément  $g$  de  $\mathcal{N}^p$  est dans  $\text{Isom}(\mathcal{T}^p)$  si et seulement si  $\mathcal{A}_g = \mathcal{B}_g = \emptyset$ .

Soient maintenant  $a$  et  $b$  deux sommets distincts de  $\mathcal{T}^p$ . On note  $\gamma$  le segment géodésique qui relie  $a$  et  $b$ , et on désigne par  $A_a^b$  le sous-arbre de  $\mathcal{T}^p$  enraciné en  $a$  des points qui sont atteints par des géodésiques

qui partent de  $a$  et dont la première arête n'est pas contenue dans  $\gamma$  (i.e. par des géodésiques qui s'éloignent de  $b$ ). On désignera simplement par  $A_a$  l'arbre enraciné  $A_a^\sigma$ , et on notera  $\partial A_a^b$  le bord de  $A_a^b$  à l'infini.

4. On fixe l'un des  $p + 1$  sous-arbres de  $\mathcal{T}^p$  enracinés sur l'origine, que par abus de notation on désigne par  $A_\sigma$ . On note  $\mathcal{N}_\sigma^p$  le sous-groupe des  $g \in \mathcal{N}^p$  qui fixent  $\partial A_\sigma$ , y agissant isométriquement (par rapport à la métrique  $\partial \text{ist}$ ). On considère l'espace de Hilbert  $\mathcal{L} = \ell^2(\mathcal{N}^p/\mathcal{N}_\sigma^p)$ . Le groupe  $\mathcal{N}^p$  agit isométriquement sur  $\mathcal{L}$  par translations à gauche.

À chaque sommet  $a$  de  $\mathcal{T}^p$  on associe l'élément  $\phi_a \in \mathcal{N}^p/\mathcal{N}_\sigma^p$  donné par  $\phi_a = [h]$ , où  $h \in \mathcal{N}^p$  est un élément dont le représentant maximal envoie  $A_\sigma$  sur  $A_a$  isométriquement (par rapport à la métrique  $\text{dist}$ ), et  $[h]$  est sa classe dans  $\mathcal{N}^p/\mathcal{N}_\sigma^p$ . Pour  $g \in \mathcal{N}^p$  on considère l'élément  $c_1(g) \in \mathcal{L}$  défini « formellement » par

$$c_1(g) = \sum g(\delta_{\phi_a}) - \sum \delta_{\phi_b},$$

où  $\delta$  désigne le delta de Dirac (i.e.  $\delta_{\phi_a}$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $\{\phi_a\}$ ). Le mot « formellement » signifie que les termes égaux de la définition de  $c_1(g)$  se simplifient. Après cette simplification il ne reste qu'un nombre fini de termes, ce qui montre bien que la fonction  $c_1(g)$  appartient à  $\mathcal{L}$ . D'autre part,  $c_1(g)$  est le cobord formel associé à la fonction  $K = \sum \delta_{\phi_a}$  (qui n'appartient pas à  $\mathcal{L}$  !), et ceci montre que  $c_1$  est un cocycle (par rapport à la représentation par translations  $\theta_1$ ).

5. Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\mathcal{N}^p$ . Pour  $g \in \Gamma - \text{Isom}(\mathcal{T}^p)$  soit  $d = d(g)$  la distance entre  $\sigma$  et  $A_g$ . Considérons le segment géodésique  $\gamma$  qui relie  $\sigma$  et  $A_g$ , et soient  $a_1, a_2, \dots, a_{d-1}$ , les sommets de l'intérieur de  $\gamma$ . On vérifie aisément que pour tout sommet  $b$  de  $\mathcal{T}^p$  on a  $g(\delta_{\phi_{a_i}}) \neq \delta_b, i = 1, \dots, d - 1$ , d'où on déduit que  $\|c(g)\|^2 \geq d - 1$ . Soit maintenant  $g \in \Gamma \cap \text{Isom}(\mathcal{T}^p)$ . Notons  $d' = d'(g)$  la distance entre  $\sigma$  et  $\tilde{g}(\sigma)$ , et considérons le segment géodésique  $\gamma$  qui relie ces deux points. Notons  $a_1, \dots, a_{d'-1}$ , les sommets de l'intérieur de  $\tilde{g}^{-1}(\gamma)$ . Il est facile de vérifier que pour tout  $i = 1, \dots, d' - 1$  et tout sommet  $b$  de  $\mathcal{T}^p$  on a  $g(\delta_{\phi_{a_i}}) \neq \delta_b$  (car  $A_{\tilde{g}(a_i)}$  n'est pas l'image de  $A_{a_i}$  par  $\tilde{g}$  !). On en déduit que  $\|c(g)\|^2 \geq d' - 1$ .

Si  $\Gamma$  possède la propriété (T), la fonction  $g \mapsto \|c(g)\|$  doit être uniformément bornée sur  $\Gamma$ . Il existe alors un entier  $N > 0$  tel que pour tout  $g \in \Gamma - \text{Isom}(\mathcal{T}^p)$  on a  $\text{dist}(\sigma, A_g) \leq N$  (et donc  $\text{dist}(\sigma, B_g) \leq N$  pour tout  $g \in \Gamma - \text{Isom}(\mathcal{T}^p)$ ), et tel que pour tout  $g \in \Gamma \cap \text{Isom}(\mathcal{T}^p)$  on a  $\text{dist}(\sigma, \tilde{g}(\sigma)) \leq N$ . Le théorème s'en suit aisément.

*Remarque.* – Même si  $\text{Isom}(\mathcal{T}^p)$  est un sous-groupe de  $\mathcal{N}^p$ , la démonstration donnée n'utilise pas le théorème d'Alperin et Watatani. En fait, l'argument de la preuve permet de redémontrer ce résultat classique pour les sous-groupes du groupe des isométries d'un arbre simplicial quelconque.

6. On considère maintenant l'espace  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{2,\Delta}(\partial \mathcal{T}^p \times \partial \mathcal{T}^p)$  des fonctions  $K$  dans  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^2(\partial \mathcal{T}^p \times \partial \mathcal{T}^p)$  symétriques, c'est-à-dire telles que  $K(x, y) = K(y, x)$  pour  $\mu \times \mu$ -presque-tout  $(x, y) \in \partial \mathcal{T}^p \times \partial \mathcal{T}^p$ . Pour un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\mathcal{N}^p$  on considère la représentation unitaire  $\theta_2$  de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{2,\Delta}(\partial \mathcal{T}^p \times \partial \mathcal{T}^p)$  donnée par

$$\theta_2(g)K(x, y) = K(g^{-1}(x), g^{-1}(y))\sqrt{(g^{-1})'(x)(g^{-1})'(y)}.$$

Pour chaque  $g \in \Gamma$  considérons la fonction  $c_2(g) : \partial \mathcal{T}^p \times \partial \mathcal{T}^p \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$c_2(g)(x, y) = \frac{\sqrt{(g^{-1})'(x)(g^{-1})'(y)}}{\partial \text{ist}(g^{-1}(x), g^{-1}(y))} - \frac{1}{\partial \text{ist}(x, y)}.$$

L'application  $g \mapsto c_2(g)$  est formellement le cobord de la fonction  $(x, y) \mapsto 1/\partial \text{ist}(x, y)$ , et vérifie donc la relation de cocycle  $c_2(gh) = \theta_2(g)c_2(h) + c_2(g)$ . Nous affirmons que  $c_2(g)$  appartient à  $\mathcal{L}$  pour tout  $g \in \mathcal{N}^p$ . En effet, la propriété de symétrie pour  $c_2(g)$  est évidente. D'autre part, la fonction  $c_2(g)$  est nulle au voisinage de la diagonale, car l'extension au bord de toute isométrie  $g$  de  $\mathcal{T}^p$  vérifie l'égalité  $\partial \text{ist}(x, y)g'(x)g'(y) = \partial \text{ist}(g(x), g(y))$  pour toute paire de points distincts  $x, y \in \partial \mathcal{T}^p$ . L'affirmation

résulte alors du fait que la fonction  $(x, y) \mapsto 1/\text{dist}(x, y)$  est uniformément bornée en dehors de tout voisinage de la diagonale.

Si  $\Gamma$  possède la propriété (T) alors le cocycle  $c_2$  est un cobord. Autrement dit, il existe une fonction  $K \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{2,\Delta}(\partial T^p \times \partial T^p)$  telle que  $c_2(g) = \theta_2(g)K - K$  pour tout  $g \in \Gamma$ , c'est-à-dire

$$\left[ \frac{1}{\text{dist}(g^{-1}(x), g^{-1}(y))} - K(g^{-1}(x), g^{-1}(y)) \right]^2 (g^{-1})'(x)(g^{-1})'(y) = \left[ \frac{1}{\text{dist}(x, y)} - K(x, y) \right]^2.$$

Cette dernière égalité entraîne la  $\Gamma$ -invariance du courant géodésique

$$\nu_K = \left[ \frac{1}{\text{dist}(x, y)} - K(x, y) \right]^2 d\mu(x) d\mu(y).$$

7. Pour  $K \in \mathcal{L}$  notons  $\Gamma_K$  le groupe des homéomorphismes de  $\partial T^p$  qui préservent le courant  $\nu_K$ . L'étude de la dynamique des éléments de  $\nu_K$  semble intéressante. Par exemple, à l'aide de la « formule du birapport »

$$\int_{\partial A_a^b} \int_{\partial A_b^a} \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{\text{dist}^2(x, y)} = p^{-\text{dist}(a,b)},$$

on démontre aisément qu'il existe un sous-ensemble compact  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(K)$  de  $T^p$  tel que pour tout élément  $g \in \Gamma_K - \text{Isom}(T^p)$  on a soit  $\mathcal{A}_g \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$  soit  $\mathcal{B}_g \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ .

Pour chaque  $g \in \Gamma_K$  on définit l'application  $Q(g) : T^p \rightarrow T^p$  par  $Q(g)(a) = \tilde{g}(a)$  si  $a \in \overline{T^p - \mathcal{A}_g}$ , et par  $Q(g)(a) = Q(g)(b)$  dans le cas contraire, où  $b$  est un sommet quelconque de  $T^p$  qui réalise la distance de  $a$  au bord de  $\mathcal{A}_g$ . La question suivante se pose de manière naturelle : la correspondance  $g \mapsto Q(g)$  définit-elle une quasi-action de  $\Gamma$  sur  $T^p$  au sens de [6] ? Si la réponse est affirmative, cela permettrait de donner une autre preuve complète du théorème de cette note à l'aide des résultats de [6] et du théorème d'Alperin et Watatani.

Notons qu'une sorte d'analogue de la question ci-dessus pour le cas des homéomorphismes du cercle a une réponse affirmative : si  $\nu$  est un courant géodésique la forme  $[1/|x - y| - K(x, y)]^2 dx dy$ , avec  $K \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{2,\Delta}(S^1 \times S^1)$ , alors le groupe des homéomorphismes de  $S^1$  qui préservent ce courant est quasi-symétrique au sens de [3] ; donc, d'après le théorème de convergence, il est topologiquement conjugué à un sous-groupe de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

**Remerciements.** Je remercie Étienne Ghys pour m'avoir encouragé à rédiger cette note, ainsi que Alain Valette et Christophe Kapoudjan pour d'intéressantes discussions sur le sujet.

### Références bibliographiques

- [1] D. Farley, A proper isometric action of Thompson group V on Hilbert space, Prépublication, 2002.
- [2] P. De la Harpe, A. Valette, La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts, Astérisque 175 (1989).
- [3] A. Hinkkanen, The structure of certain quasisymmetric groups, Mem. Amer. Math. Soc. 83 (1990) 1–87.
- [4] C. Kapoudjan, Sur des analogues  $p$ -adiques du groupe des difféomorphismes du cercle, Thèse de doctorat, Université Lyon-1, 1998.
- [5] C. Kapoudjan, Simplicity of Neretin's group of spheromorphisms, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 49 (1999) 1225–1240.
- [6] L. Mosher, M. Sageev, K. Whyte, Quasi-actions on trees I: Bounded valence, Prépublication, 2002.
- [7] A. Navas, Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle, Ann. Sci. de l'ENS, à paraître.
- [8] Y. Neretin, Combinatorial analogues of the group of diffeomorphisms of the circle, Russian Acad. Sci. Izv. Math. 41 (1993) 337–349.
- [9] Y. Neretin, Groups of hierarchomorphisms of trees and related Hilbert spaces, Prépublication, 2001.
- [10] A. Reznikov, Analytic topology of groups, actions, strings and varieties, Prépublication, 1999.