C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 643–648

Physique mathématique/*Mathematical Physics*
(Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*)

L'effet Hawking pour un champ de Dirac

Fabrice Melnyk

Mathématiques appliquées de Bordeaux, UMR CNRS 5466, Université Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France

Reçu le 27 juin 2002 ; accepté le 25 juillet 2002

Note présentée par Jean-Michel Bony.

Résumé Nous considérons l'effondrement gravitationnel d'une étoile chargée en un trou-noir. Nous montrons qu'un observateur fixe en variables de Schwarzschild observe, aux derniers temps de l'effondrement dans son temps propre, un flux thermal sortant de particules de spin $1/2$ contenant préférentiellement des particules dont la charge est la même que celle du trou-noir. Ce résultat est connu sous le nom d'effet Hawking. ***Pour citer cet article : F. Melnyk, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 643–648.***

The Hawking effect for the Dirac field

Abstract We consider the gravitational collapse of the charged star leading to a black-hole. We prove that a fixed observer in Schwarzschild variables observes, at the last moments of the collapse in his own proper time, an outgoing thermal flux of spin $1/2$ particles containing preferentially the particles with the same charge that the black-hole. This is the Hawking effect. ***To cite this article: F. Melnyk, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 643–648.***

Abridged English version

We consider the (DeSitter–)Reissner–Nordstrøm space–time outside a spherical and charged star of radius $z(t)$ collasping into a charged black-hole of radius $r_0 > 0$:

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times \left]z(t), +\infty\right[_{r_*} \times S^2_\omega,$$
$$g_{ab}\,\mathrm{d}x^a\,\mathrm{d}x^b = F(r)\,\mathrm{d}t^2 - F(r)\,\mathrm{d}r_*^2 - r^2\,\mathrm{d}\omega^2, \quad \mathrm{d}r_* = F^{-1}(r)\,\mathrm{d}r,$$
$$\mathrm{d}\omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2, \quad \omega = (\theta,\varphi) \in [0,\pi] \times [0, 2\pi[\,,$$
$$F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad M > 0,\ Q \in \mathbb{R},\ \Lambda \geqslant 0,$$

where r_*, M, Q and Λ are respectively the Regge–Wheeler radial coordinate, the mass, the charge of the star and the cosmological constant. With the reasonable assumptions on the behaviour of the radius of the star when it collapses, we have

Adresse e-mail : fabrice.melnyk@math.u-bordeaux.fr (F. Melnyk).

S1631-073X(02)02532-3/FLA

$$z \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R});\ \forall t \in \mathbb{R},\quad -1 < \dot z(t) \leqslant 0,\quad \kappa_0 := \frac{1}{2}\dot F(r_0),$$
$$z(t) = -t - C_{\kappa_0}\,\mathrm{e}^{-2\kappa_0 t} + \varpi(t),\quad C_{\kappa_0} > 0,\quad \bigl|\varpi(t)\bigr| + \bigl|\dot\varpi(t)\bigr| = \mathcal{O}\bigl(\mathrm{e}^{-4\kappa_0 t}\bigr),\quad t \to +\infty.$$

Since

$$\mathrm{L}^2_t = \mathrm{L}^2\bigl(\left]z(t), +\infty\right[_{r_*} \times S^2_\omega,\ r^2 F^{1/2}\,\mathrm{d}r_*\,\mathrm{d}\omega\bigr)^4,$$

we introduce the mixing hyperbolic problem outside of the collapsing star for the Dirac equation concerning the spin $1/2$ particles of charge $q \in \mathbb{R}$ and mass $m > 0$,

$$\partial_t \Psi = \mathrm{i} D_t \Psi,\quad z(t) < r_*, \tag{1}$$
$$\frac{\dot z\gamma^0 - \gamma^1}{\sqrt{1-\dot z^2}}\Psi\bigl(t, z(t)\bigr) = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\gamma^5}\Psi\bigl(t, z(t)\bigr), \tag{2}$$
$$\Psi(t = s, \cdot) = \Psi_s(\cdot) \in \mathrm{L}^2_s. \tag{3}$$

Here $\nu \in \mathbb{R}$ is the chiral angle associated with generalized MIT boundary condition (2), (see [3]), and using the Dirac matrices γ^j, $j = 0, \ldots, 3$, D_t is the Dirac Hamiltonian with the dense domain $\mathcal{D}(D_t)$, such that:

$$D_t := -\frac{qQ}{r} + \Gamma^1\left(\partial_{r_*} + \frac{F(r)}{r} + \frac{1}{4}F(r)\right) + \sqrt{F(r)}\left(\frac{\Gamma^2}{r}\left(\partial_\theta + \frac{1}{2}\cot\theta\right) + \frac{\Gamma^3}{r\sin\theta}\partial_\varphi + \Gamma^4\right),$$
$$\Gamma^1 := \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1 = \mathrm{i}\,\mathrm{Diag}(-1, 1, 1, -1),\quad \Gamma^2 := \mathrm{i}\gamma^0\gamma^2,\quad \Gamma^3 := \mathrm{i}\gamma^0\gamma^3,\quad \Gamma^4 := -m\gamma^0,$$
$$\mathcal{D}(D_t) = \left\{\Psi \in \mathrm{L}^2_t, D_t\Psi \in \mathrm{L}^2_t;\ \frac{\dot z\gamma^0 - \gamma^1}{\sqrt{1-\dot z^2}}\Psi\bigl(z(t), \omega\bigr) = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\gamma^5}\Psi(z(t), \omega)\right\}.$$

The hyperbolic problem (1), (2) and (3) is solved by a propagator $U(t, s)$ which is isometric and strongly continuous from L^2_s onto L^2_t with $\Psi(t, r_*, \omega) = U(t, s)\Psi_s(r_*, \omega)$. To describe the Hawking effect [5], we use the Quantum Field Theory with the approach introduces by Dimock of the algebras of local observables in curved space–time [4]. We assume that the star is stationary in the past and the quantum state, in this case, is the Fermi–Dirac–Fock vacuum. As we want to obtain some information on the quantum state in the last moment of the collapse, the quantization of the Dirac field on the globally manifold $\mathcal{M}$ leads us to study the limit:

$$\lim_{T\to+\infty}\bigl\|\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(D_0)U(0, T)\Phi\bigr\|_{\mathrm{L}^2_0},\quad \Phi \in \mathrm{L}^2\bigl(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega, r^2F^{1/2}\,\mathrm{d}r_*\,\mathrm{d}\omega\bigr)^4. \tag{4}$$

Thanks to the sharp analysis of $U(0, T)$, we deduce the key result [8]:

THEOREM 0.1. – *Given* $\Phi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega, r^2F^{1/2}\,\mathrm{d}r_*\,\mathrm{d}\omega)^4$, *we have*:

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to+\infty}\bigl\|\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(D_0)U(0, T)\Phi\bigr\|^2_{\mathrm{L}^2_0}\\ &\quad = \bigl\|\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(D_{\Lambda,\to})\Omega^-_{\Lambda,\to}\Phi\bigr\|^2_{\mathrm{L}^2_{\Lambda,\to}} + \bigl\langle\Omega^-_\leftarrow\Phi, \mu\,\mathrm{e}^{\sigma D_\leftarrow}\bigl(1 + \mu\,\mathrm{e}^{\sigma D_\leftarrow}\bigr)^{-1}\Omega^-_\leftarrow\Phi\bigr\rangle_{\mathrm{L}^2_\leftarrow}\end{aligned} \tag{5}$$

with

$$\mu = \mathrm{e}^{\sigma\delta},\quad \delta := \frac{qQ}{r_0},\quad \sigma = \frac{2\pi}{\kappa_0}.$$

The two triplets $(D_\leftarrow, \mathrm{L}^2_\leftarrow, \Omega^-_\leftarrow)$ and $(D_{\Lambda,\to}, \mathrm{L}^2_{\Lambda,\to}, \Omega^-_{\Lambda,\to})$ associated to two asymptotic regions for the future black-hole, are composed by a Hamiltonian for a free dynamic with its Hilbert space and a wave operator defined thanks to the dynamic on the eternal black-hole and the free dynamic. The two regions are respectively the horizon and, according to $\Lambda > 0$ or $\Lambda = 0$, the cosmological horizon or the spatial infinity

Pour citer cet article : F. Melnyk, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 643–648

when the metric is asymptotically flat. We have proved the asymptotic completness for $\Omega^-_{\leftarrow}$ and $\Omega^-_{\Lambda,\rightarrow}$ in [7], and for $\Omega^-_{\leftarrow}$ and $\Omega^-_{0,\rightarrow}$ in [8].

In the third term of (5), we identify the KMS state for a ideal Fermi gaz [2]. Hence, the previous theorem means that a fixed observer in Schwarzschild variables observes, at the last moment of the collapse in his own proper time, an outgoing flux of spin $1/2$ particles. This flux is compared to a Fermi gaz with the temperature $T_{\mathrm{Haw}} = \sigma^{-1} = \kappa_0/2\pi$ and of electric charge density $\rho_{\mathrm{Haw}} = q\delta/\pi = (q^2 Q)/(\pi r_0)$. Moreover, since ρ_{Haw} and Q have the same sign, then the black-hole preferentially emits charged particles with the same sign as its own charge. We also note that the result of the previous theorem is independent of the history of the collapse (contained in the function z) and the boundary condition on the star surface, this is a "no hair" phenomenon.

---

1. Système de Dirac dans la métrique de (DeSitter–)Reissner–Nordstrøm

Nous considérons l'espace-temps de (DeSitter–)Reissner–Nordstrøm à l'extérieur d'une étoile sphérique, chargée et de rayon $z(t)$, s'effondrant en un trou-noir :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times \left]z(t), +\infty\right[_{r_*} \times S^2_\omega, \quad 0 < r_+ \leqslant +\infty,\\
&g_{ab}\,\mathrm{d}x^a\,\mathrm{d}x^b = F(r)\,\mathrm{d}t^2 - F(r)\,\mathrm{d}r_*^2 - r^2\,\mathrm{d}\omega^2, \quad \mathrm{d}r_* = F^{-1}(r)\,\mathrm{d}r,\\
&\mathrm{d}\omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2, \quad \omega = (\theta,\varphi) \in [0,\pi] \times [0, 2\pi[\,,\\
&F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad M > 0,\ Q \in \mathbb{R},\ \Lambda \geqslant 0,
\end{aligned}$$

où r_*, M, Q et Λ sont respectivement la coordonnée radiale de Regge–Wheeler, la masse, la charge de l'étoile et la constante cosmologique. Le rayon du trou-noir r_0 et l'éventuel rayon cosmologique r_+ sont définis par

$$0 < r_0 < r_+, \quad F(r_0) = F(r_+) = 0, \quad \dot F(r_0) > 0, \quad \dot F(r_+) < 0, \quad r \in]r_0, r_+[\Rightarrow F(r) > 0.$$

En faisant des hypothèses raisonnables sur l'évolution du rayon de l'étoile lors de l'effondrement, on obtient que $z(t)$ vérifie :

$$\begin{aligned}
&z \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R});\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad -1 < \dot z(t) \leqslant 0, \quad \kappa_0 := \frac{1}{2}\dot F(r_0),\\
&z(t) = -t - C_{\kappa_0}\,\mathrm{e}^{-2\kappa_0 t} + \varpi(t), \quad C_{\kappa_0} > 0, \quad \left|\varpi(t)\right| + \left|\dot\varpi(t)\right| = \mathcal{O}\left(\mathrm{e}^{-4\kappa_0 t}\right), \quad t \to +\infty.
\end{aligned}$$

Dans le cadre des espaces

$$\mathrm{L}^2_t = \mathrm{L}^2\left(]z(t), +\infty\left[_{r_*} \times S^2_\omega, r^2 F^{1/2}\,\mathrm{d}r_*\,\mathrm{d}\omega\right)^4,\right.$$

nous résolvons le problème mixte à l'extérieur de l'étoile en effondrement pour l'équation de Dirac modélisant des particules de spin $1/2$ de charge $q \in \mathbb{R}$ et de masse $m > 0$,

$$\partial_t \Psi = \mathrm{i} D_t \Psi, \quad z(t) < r_*, \tag{6}$$

$$\frac{\dot z\gamma^0 - \gamma^1}{\sqrt{1-\dot z^2}}\Psi\big(t, z(t)\big) = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{i\nu\gamma^5}\Psi\big(t, z(t)\big), \tag{7}$$

$$\Psi(t = s, \cdot) = \Psi_s(\cdot) \in \mathrm{L}^2_s. \tag{8}$$

Ici $\nu \in \mathbb{R}$ est l'angle chiral associé à la condition aux limites généralisée MIT telle que : si $r_+ = +\infty$ alors $\nu \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (voir [3]). De plus, en utilisant les matrices de Dirac γ^j, $j = 0, \ldots, 3$, D_t est l'hamiltonien de Dirac de domaine dense $\mathcal{D}(D_t)$, tel que

$$D_t := -\frac{qQ}{r} + \Gamma^1\left(\partial_{r_*} + \frac{F(r)}{r} + \frac{1}{4}F(r)\right) + \sqrt{F(r)}\left(\frac{\Gamma^2}{r}\left(\partial_\theta + \frac{1}{2}\cot\theta\right) + \frac{\Gamma^3}{r\sin\theta}\partial_\varphi + \Gamma^4\right), \quad (9)$$

$$\Gamma^1 := \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1 = \mathrm{i}\,\mathrm{Diag}(-1,1,1,-1), \quad \Gamma^2 := \mathrm{i}\gamma^0\gamma^2, \quad \Gamma^3 := \mathrm{i}\gamma^0\gamma^3, \quad \Gamma^4 := -m\gamma^0, \quad (10)$$

$$\mathcal{D}(D_t) = \left\{\Psi \in \mathrm{L}^2_t,\ D_t\Psi \in \mathrm{L}^2_t;\ \frac{\dot z\gamma^0 - \gamma^1}{\sqrt{1-\dot z^2}}\Psi\big(z(t),\omega\big) = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{i\nu\gamma^5}\Psi\big(z(t),\omega\big)\right\}. \quad (11)$$

Le problème mixte hyperbolique (6), (7) et (8) est résolu par un propagateur $U(t,s)$ qui est isométrique et fortement continu de L^2_s dans L^2_t tel que $\Psi(t,r_*,\omega) = U(t,s)\Psi_s(r_*,\omega)$.

2. Diffusion par un trou-noir éternel de (DeSitter–)Reissner–Nordstrøm

On considère le problème de Cauchy pour l'équation de Dirac massive et chargée dans un trou-noir éternel de type (DeSitter–)Reissner–Nordstrøm :

$$\partial_t\Psi_{\mathrm{BH}} = \mathrm{i}D_{\mathrm{BH}}\Psi_{\mathrm{BH}}, \quad \Psi_{\mathrm{BH}}(t=0,\cdot) = \Psi_0(\cdot) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}}, \quad (12)$$

où l'opérateur auto-adjoint D_{BH} de domaine dense $\mathcal{D}(D_{\mathrm{BH}}) = \{\Psi \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}},\ D_{\mathrm{BH}}\Psi \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}}\}$, a la même expression que D_t dans (9) et

$$\mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}} = \mathrm{L}^2\big(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega,\ r^2F^{1/2}\,\mathrm{d}r_*\,\mathrm{d}\omega\big)^4.$$

Ce problème est résolu par un propagateur $U(t)$ qui est isométrique et fortement continu sur $\mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}}$ (voir [7] ou [6]). Près de l'horizon du trou-noir, nous comparons les solutions de (12) dans $\mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}}$ avec celles du problème associé à l'hamiltonien asymptotique à l'horizon :

$$\partial_t\Psi_\leftarrow = \mathrm{i}D_\leftarrow\Psi_\leftarrow, \quad \Psi_\leftarrow(t=0,\cdot) = \Psi_0(\cdot) \in \mathrm{L}^2_\leftarrow, \quad (13)$$

$$D_\leftarrow := \Gamma^1\partial_{r_*} - \frac{qQ}{r_0}, \quad \mathcal{D}(D_\leftarrow) = \mathrm{H}^1\big(\mathbb{R}_{r_*}, \mathrm{L}^2\big(S^2_\omega\big)\big)^4, \quad (14)$$

$$\mathrm{L}^2_\leftarrow = \mathrm{L}^2\big(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega,\ \mathrm{d}r_*\,\mathrm{d}\omega\big)^4. \quad (15)$$

Nous introduisons les sous-espaces $\mathrm{L}^{2+}_\leftarrow$ et $\mathrm{L}^{2-}_\leftarrow$ des champs rentrants et sortants

$$\mathrm{L}^2_\leftarrow = \mathrm{L}^{2+}_\leftarrow \oplus \mathrm{L}^{2-}_\leftarrow, \quad \mathrm{L}^{2+}_\leftarrow := \big\{\Psi \in \mathrm{L}^2_\leftarrow,\ \Psi_2 = \Psi_3 = 0\big\}, \quad \mathrm{L}^{2-}_\leftarrow := \big\{\Psi \in \mathrm{L}^2_\leftarrow,\ \Psi_1 = \Psi_4 = 0\big\}.$$

Nous définissons alors les opérateurs d'onde à l'horizon :

$$\Omega^\pm_\leftarrow\Psi := \lim_{t\to\pm\infty} U_\leftarrow(-t)\mathcal{J}_\leftarrow U(t)\Psi \quad \text{dans } \mathrm{L}^{2\pm}_\leftarrow,\ \forall\Psi \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}},$$
$$U_\leftarrow(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}tD_\leftarrow}, \quad \mathcal{J}_\leftarrow : \Psi \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}} \mapsto \chi_\leftarrow rF^{1/4}\Psi \in \mathrm{L}^2_\leftarrow,$$
$$\chi_\leftarrow \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_{r_*}),\ \exists a,b \in \mathbb{R},\ 0 < a < b < 1, \quad \chi_\leftarrow := \begin{cases} 1, & r_* < a, \\ 0, & r_* > b. \end{cases}$$

A l'infini spatial, nous comparons les solutions de (12) sur $\mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}}$ avec celles du problème associé à l'hamiltonien asymptotique quand $r_* \to +\infty$:

$$\partial_t\Psi_\rightarrow = \mathrm{i}D_{\Lambda,\rightarrow}\Psi_\rightarrow, \quad \Psi_\rightarrow(t=0,\cdot) = \Psi_0(\cdot) \in \mathrm{L}^2_{\Lambda,\rightarrow}, \quad \Lambda \geqslant 0. \quad (16)$$

Si $\Lambda > 0$, il apparait un horizon cosmologique. Nous considérons donc la dynamique libre donnée par l'hamiltonien :

$$D_{\Lambda,\rightarrow} := \Gamma^1\partial_{r_*} - \frac{qQ}{r_+}, \quad \mathcal{D}(D_{\Lambda,\rightarrow}) = \mathrm{H}^1\big(\mathbb{R}_{r_*}, \mathrm{L}^2\big(S^2_\omega\big)\big)^4, \quad (17)$$

$$\mathrm{L}^2_{\Lambda,\rightarrow} := \mathrm{L}^2_\leftarrow = \mathrm{L}^2\big(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega, \mathrm{d}r_*\,\mathrm{d}\omega\big)^4. \quad (18)$$

Nous définissons alors l'opérateur d'onde à l'horizon cosmologique tel que

$$\Omega^{\pm}_{\Lambda,\rightarrow}\Psi := \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tD_{\Lambda,\rightarrow}}\mathcal{J}_{\Lambda,\rightarrow}U(t)\Psi \quad \text{dans } \mathrm{L}^{2\mp}_{\Lambda,\rightarrow} := \mathrm{L}^{2\mp}_{\leftarrow}, \quad \forall\Psi\in\mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}},$$

$$\mathcal{J}_{\Lambda,\rightarrow} : \Psi\in\mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}} \mapsto \chi_{\rightarrow} r F^{1/4}\Psi \in \mathrm{L}^2_{\Lambda,\rightarrow}, \quad \chi_{\rightarrow} = 1-\chi_{\leftarrow}.$$

Quand $\Lambda = 0$, l'infini spatial de l'espace-temps de Reissner–Nordstrøm est asymptotiquement plat. Donc, nous pouvons choisir la dynamique libre définie par l'hamiltonien de Dirac dans l'espace-temps plat de Minkowski et cela en coordonnées sphériques $(\rho,\omega)\in\mathbb{R}^+_*\times[0,\pi]\times[0,2\pi[$. D'autre part, afin d'éviter des interactions artificielles de longue portée, nous identifions la variable radiale avec celle de Regge–Wheeler telle que $\rho = r_* > 0$. Nous introduisons alors :

$$D_{0,\rightarrow} := \Gamma^1\left(\partial_{r_*}+\frac{1}{r_*}\right)+\frac{\Gamma^2}{r_*}\left(\partial_\theta+\frac{1}{2}\cot\theta\right)+\frac{\Gamma^3}{r_*\sin\theta}\partial_\varphi+\Gamma^4, \tag{19}$$

$$\mathrm{L}^2_{0,\rightarrow} = \mathrm{L}^2\big(\mathbb{R}_{r_*}\times S^2_\omega,\ {r_*}^2\,\mathrm{d}r_*\,\mathrm{d}\omega\big)^4, \quad \mathcal{D}(D_{0,\rightarrow}) = \mathrm{H}^1\big(\mathbb{R}_{r_*}\times S^2_\omega,\ {r_*}^2\,\mathrm{d}r_*\,\mathrm{d}\omega\big)^4. \tag{20}$$

Il subsiste toutefois des perturbations de longue portée dues aux interactions gravitationnelles ($m\neq 0$) et électromagnétiques ($q\neq 0$). Comme dans [6,7], nous définissons à l'infini les opérateurs d'onde modifiés à la manière de Dollard :

$$\Omega^{\pm}_{0,\rightarrow}\Psi := \lim_{t\to\pm\infty} U_{0,\rightarrow}(-t)\mathcal{J}_{0,\rightarrow}U(t)\Psi \quad \text{dans } \mathrm{L}^2_{0,\rightarrow},\ \forall\Psi\in\mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}},$$

$$(\mathcal{J}_{0,\rightarrow})^*\Phi(r_*,\omega) := \begin{cases} \chi_{\rightarrow}(\rho=r_*)r^{-1}F^{-1/4}r_*\Phi(\rho=r_*,\omega), & r_*>0,\\ 0 & r_*\leqslant 0,\end{cases} \quad \forall\Phi\in\mathrm{L}^2_{0,\rightarrow},$$

$$U_{0,\rightarrow}(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}tD_{0,\rightarrow}}\,\mathrm{e}^{i\log(t)X}, \quad \log(t) := t|t|^{-1}\ln|t|,$$

$$X := m^2 D^{-1}_{0,\rightarrow}W - qQW, \quad W := \mathcal{T}\mathcal{F}^*\big(|\xi|^{-1}\sqrt{m^2+|\xi|^2}\big)\mathcal{F}\mathcal{T}^{-1},$$

où, $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier usuelle et $\mathcal{T}$ l'opérateur spinoriel isométrique permettant de passer des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes. Nous démontrons alors dans [7,8] que :

THÉORÈME 2.1. – *Les opérateurs $\Omega^{\pm}_{\leftarrow}$, $\Omega^{\pm}_{\Lambda,\rightarrow}$ et $\Omega^{\pm}_{0,\rightarrow}$ existent sur $\mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}}$, et sont indépendants de $\chi_{\leftarrow}$ et $\chi_{\rightarrow}$. De plus, $\Omega^{\pm}_{\leftarrow}\oplus\Omega^{\pm}_{\Lambda,\rightarrow}$ et $\Omega^{\pm}_{\leftarrow}\oplus\Omega^{\pm}_{0,\rightarrow}$ sont des isométries, respectivement de $\mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}}$ sur $\mathrm{L}^{2\pm}_{\leftarrow}\oplus\mathrm{L}^{2\mp}_{\Lambda,\rightarrow}$ et de $\mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}}$ sur $\mathrm{L}^{2\pm}_{\leftarrow}\oplus\mathrm{L}^2_{0,\rightarrow}$.*

3. L'effet Hawking

Nous décrivons l'effet Hawking [5] dans le cadre de la Théorie Quantique des Champs avec les algèbres d'observables locales pour le système de Dirac dans des espace-temps courbes [4]. Nous supposons que l'étoile est stationnaire dans le passé et que l'état quantique dans ce cas est le vide de Fermi–Dirac–Fock. Comme nous voulons obtenir des informations sur l'état quantique aux derniers temps de l'effondrement, la quantification du champ de Dirac sur la variété globalement hyperbolique $\mathcal{M}$ nous conduit à étudier la limite suivante :

$$\lim_{T\to+\infty}\big\|\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(D_0)U(0,T)\Phi\big\|_{\mathrm{L}^2_0}, \quad \Phi\in\mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}}. \tag{21}$$

Grâce à une analyse fine de $U(0,T)$, nous déduisons le résultat clef [8] :

THÉORÈME 3.1. – *Soit $\Phi\in\mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}}$, alors, pour $\Lambda\geqslant 0$*

$$\lim_{T\to+\infty}\big\|\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(D_0)U(0,T)\Phi\big\|^2_{\mathrm{L}^2_0}$$
$$= \big\|\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(D_{\Lambda,\rightarrow})\Omega^{-}_{\Lambda,\rightarrow}\Phi\big\|^2_{\mathrm{L}^2_{\Lambda,\rightarrow}} + \big\langle\Omega^{-}_{\leftarrow}\Phi, \mu\,\mathrm{e}^{\sigma D_{\leftarrow}}\big(1+\mu\,\mathrm{e}^{\sigma D_{\leftarrow}}\big)^{-1}\Omega^{-}_{\leftarrow}\Phi\big\rangle_{\mathrm{L}^2_{\leftarrow}} \tag{22}$$

avec

$$\mu = e^{\sigma\delta}, \quad \delta := \frac{qQ}{r_0}, \quad \sigma = \frac{2\pi}{\kappa_0}.$$

Nous reconnaissons dans le troisième terme de (22), l'expression d'un état KMS pour un gaz idéal de Fermi–Dirac où σ^{-1} est la température et δ le potentiel chimique [2]. Nous interprétons le théorème précédent de la manière suivante : un observateur fixe dans les variables de Schwarzschild observe aux derniers temps de l'effondrement pour son temps propre, un flux sortant de particules de spin $1/2$ de température $T_{\mathrm{Haw}} = \sigma^{-1} = \kappa_0/(2\pi)$ et de densité de charge électrique $\rho_{\mathrm{Haw}} = q\mu/\pi = (q^2Q)/(\pi r_0)$. De plus, puisque ρ_{Haw} et Q ont le même signe, le trou-noir émet préférentiellement des particules chargées ayant le signe correspondant à celui de l'astre. Le résultat du Théorème 3.1 ne dépend ni de l'histoire de l'effondrement (donnée par z), ni de la condition aux limites du champ sur la surface de l'étoile. Cela traduit le fait bien connu qu'à l'issu de l'effondrement gravitationnel, une étoile sans rotation perd toutes ses caractéristiques excepté sa masse et sa charge (si elle en possède une).

Nous donnons l'idée de la démonstration du Théorème 3.1, en renvoyant le lecteur à [8] pour les détails. Il s'agit d'analyser finement $U(0,T)\Phi$, $\Phi \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}}$. Pour cela, on étudie le comportement du propagateur dans deux régions disctinctes. Grâce au Théorème 2.1, dans la partie éloignée de l'étoile ($r_* \gg 1$), nous remarquons que pour $T \to +\infty$:

$$\left\|(1-\chi_{\leftarrow})U(0,T)\Phi\right\|_{\mathrm{L}^2_0} = \left\|\chi_{\rightarrow}U(-T)\Phi\right\|_{\mathrm{L}^2_0} \sim \left\|U_{\Lambda,\rightarrow}(-T)\Omega^-_{\Lambda,\rightarrow}\Phi\right\|_{\mathrm{L}^2_{\Lambda,\rightarrow}}.$$

L'étude près de l'étoile s'avère plus délicate. Nous constatons que $\chi_{\leftarrow}U(0,T)\Phi$ est totalement déterminé par $g_T(t,\omega) := {}^t(0, [U(t,T)\Phi(1-t,\omega)]_2, [U(t,T)\Phi(1-t,\omega)]_3, 0)$. Nous sommes ainsi amenés à considérer le problème mixte hyperbolique à donnée g_T spécifiée sur la sous-variété caractéristique $\Gamma := \{(t, r_*, \omega) \in \mathcal{M};\ r_* = 1-t\}$. Il s'agit d'étudier le comportement asymptotique pour $T \to +\infty$ de $G_{F,qQ}(g_T)(r_*,\omega) := \Psi(0, r_*, \omega)$. En comparant $g_T(t,\omega)$ et $g^T(t,\omega) := (\Omega^-_{\leftarrow}\Phi)(1-2t-T,\omega)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(D_0)\chi_{\leftarrow}U(0,T)\Phi\right\|_{\mathrm{L}^2_0} &= \left\|\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(D_0)G_{F,qQ}(g_T)\right\|_{\mathrm{L}^2_0} \\
&\sim \left\|\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(\widetilde{D_0})G_{0,0}\big(g^T\big)\right\|_{\mathrm{L}^2_0} \\
&\sim \left\|\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(\widetilde{D_0})\frac{1}{\sqrt{|\kappa_0 r_*|}}Bg^T\left(\frac{1}{2}-2T+\frac{1}{2\kappa_0}\ln\big(-C_{\kappa_0}r_*^{-1}\big),\omega\right)\right\|_{\mathrm{L}^2_0} \\
&= \left\langle \Omega^-_{\leftarrow}\Phi, \mu\, e^{\sigma D_{\leftarrow}}\big(1+\mu\, e^{\sigma D_{\leftarrow}}\big)^{-1}\Omega^-_{\leftarrow}\Phi\right\rangle_{\mathrm{L}^2_{\leftarrow}},
\end{aligned}$$

avec $Bg^T = (-g_3^T, 0, 0, g_2^T)$ et $\widetilde{D_0} := \Gamma^1\partial_{r_*}$. La dernière égalité résulte d'un calcul explicite (voir [1]).

Références bibliographiques

[1] A. Bachelot, Creation of fermions at the charged black-hole horizon, Ann. Inst. H. Poincaré 1 (6) (2000) 1043–1095.
[2] O. Bratteli, D.W. Robinson, Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
[3] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorn, V.F. Weisskopf, New extended model of hadrons, Phys. Rev. D (3) 9 (12) (1974) 3471–3495.
[4] J. Dimock, Dirac quantum fields on a manifold, Trans. Amer. Math. Soc. 269 (1) (1982) 133–147.
[5] S.W. Hawking, Particle creation by black holes, Comm. Math. Phys. 43 (3) (1975) 199–220.
[6] F. Melnyk, Wave operators for the massive charged linear Dirac field on the Reissner–Nordström metric, Classical Quantum Gravity 17 (11) (2000) 2281–2296.
[7] F. Melnyk, Scattering on Reissner–Nordstrøm metric for the massive chaged spin 1/2 fields, Prépublication de l'Université de Bordeaux I, Mathématiques Appliquées de Bordeaux, 01-11, 2001.
[8] F. Melnyk, The Hawking effect for spin 1/2 field Prépublication de Université de Bordeaux I, Mathématiques Appliquées de Bordeaux, 2002.