C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 359–364

**Géométrie différentielle/*Differential Geometry***
**(Calcul des variations/*Calculus of Variations*)**

# Une condition suffisante de minimalité pour les géodésiques de la métrique de Hofer

**Jérôme Le Crapper**

**Mathématiques UFR 920, Université Paris 6, 75252 Paris cedex 05, France**

**Reçu le 4 juin 2002 ; accepté le 24 juin 2002**

**Note présentée par Charles-Michel Marle.**

**Résumé** On donne une nouvelle condition suffisante afin qu'un Hamiltonien non autonome $H$ sur $\mathbb{R}^{2n}$ engendre une géodésique minimisante de la distance de Hofer. Cette condition porte sur le spectre des applications linéarisées de l'isotopie $\{\phi_t^H\}$ engendrée par $H$ aux points fixes de l'isotopie. On montre de plus que si deux difféomorphismes $\phi_0$ et $\phi_1$ sont reliés par une telle géodésique alors la distance de Hofer entre $\phi_0$ et $\phi_1$ coïncide avec celle de Viterbo. ***Pour citer cet article : J. Le Crapper, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 359–364.***


**A sufficient minimality condition for geodesics of the Hofer's metric**

**Abstract** We give a new sufficient condition for a Hamiltonian $H$ to generate a length minimizing geodesic of the Hofer's metric on the group of Hamiltonian diffeomorphisms on $\mathbb{R}^{2n}$. This condition is related to the spectra of the linearized maps of the flow $\{\phi_t^H\}$ generated by $H$ at the fixed points of the flow. In addition we show that if $\phi_0$, $\phi_1$ are two diffeomorphisms linked by such a geodesic, then the Hofer's distance between $\phi_0$ and $\phi_1$ is the same as Viterbo's one. ***To cite this article: J. Le Crapper, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 359–364.***


## *Abridged English version*

To compactly supported Hamiltonian diffeomorphisms $\phi_0$ and $\phi_1$ in $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n})$ we can associate the Hofer's distance between them, $d(\phi_0,\phi_1) := \inf(\int_0^1(\max H_t - \min H_t)\,\mathrm{d}t)$, where the infinimum is taken over all compactly supported Hamiltonians $H : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ which generate the time one map $\phi_1^H = \phi_1\phi_0^{-1}$.

According to this a Hamiltonian flow $\{\phi_t\}$ linking $\phi_0$ to $\phi_1$ is said to be a length minimizing geodesic if the equality $d_H(\phi_0,\phi_1) = \int_0^1(\max H_t - \min H_t)\,\mathrm{d}t$ holds, where $H$ generate the Hamiltonian flow $\phi_t^H = \phi_t\phi_0^{-1}$.

*Adresse e-mail :* lcrapper@ccr.jussieu.fr (J. Le Crapper).


S1631-073X(02)02484-6/FLA

To a Hamiltonian flow $\{\phi_t^H\}$ we can also associate its bifurcation diagram which is the time evolution of the action spectrum of the classical action functional $A_H$:

$$\Sigma_H := \big\{\big(t, A_H\big(\{\phi_s^H(x)\}_{0\leqslant s\leqslant t}\big)\big),\ t\in ]0,1],\ x\in \mathrm{Fix}\big(\phi_t^H\big)\big\},$$

where $\mathrm{Fix}(\phi_t^H)$ stands for the set of fixed points of the map $\phi_t^H$. One can show that a section of $\Sigma_H$ at a given $t$ is a compact and nowhere dense subset of $\mathbb{R}$.

Recall now that from the work of Bialy and Polterovich in [1] (*see* also [4]), the geodesics of the Hofer metric are characterized by the fact that they are generated by quasi-autonomous Hamiltonians, that is one parameter families of functions $H_t$ with one maximal point $x^+$ and one minimal point $x^-$ independant of $t$. In this case we have two special curves in the diagram: $t\mapsto \gamma_+(t) := -\int_0^1 H_t(x^-)\,\mathrm{d}t$ and $t\mapsto \gamma_-(t) := -\int_0^1 H_t(x^+)\,\mathrm{d}t$, which are increasing and decreasing respectively.

Now Viterbo's homological method in [6] allows us to associate to a compactly supported Hamiltonian diffeomorphism $\phi$ two critical values $c^+(\phi)$, $c^-(\phi)$ of the action, giving birth to another bi-invariant metric on $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}) : d_V(\mathrm{id},\phi) = c^+(\phi) - c^-(\phi)$.

Then it follows from the work of Bialy–Poletrovich in [1] that $d_V(\mathrm{id},\phi) \leqslant d(\mathrm{id},\phi)$ for all $\phi$ in $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n})$. Moreover it allows us to associate to a Hamiltonian $H$, two new continuous curves in $\Sigma_H : t\mapsto c^+(\phi_t^H)$, and $t\mapsto c^-(\phi_t^H)$. According to these facts, a sufficient condition for the flow $\{\phi_t^H\}$ generated by a quasi-autonomous $H$ to be a minimal geodesic is given by the relation $c^\pm(\phi_1^H) = \gamma_\pm^H(1)$.

Prompted by this remark we give a sufficient condition for this to happen. Let $H$ be a quasi-autonomous Hamiltonian function in $\mathrm{C}^\infty([0,1], \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}))$. Assume that there is at least one pair $(x^+, x^-)$ of fixed absolute extrema of $H$ such that $x^+$ and $x^-$ are both isolated between the critical points of $H_t$ for all $t$ in $[0,1]$. Notice then that $H_t$ being compactly supported for all $t$ in $[0,1]$ there exist a compact submanifold of $\mathbb{R}^{2n}$ with boundary, which contains the support of $H_t$ for all $t$. We then make the following assumption on $H$:

ASSUMPTION 1. – For all $t$ in $]0,1[$, for all $x$ in $\mathrm{Fix}(\phi_t^H)\cap \mathring{M}$, 1 is not a spectral value of $d\phi_t^H(x)$. And 1 is also not a spectral value of $d\phi_1^H(x^\pm)$.

We then have the following result:

THEOREM 0.1. – *Let $\{\phi_t\}$ be a flow generated by a quasi-autonomous $H$ with a couple $(x^+, x^-)$ of isolated fixed extrema and which satisfy the Assumption* 1 *with respect to a compact submanifold $M$ with boundary. Then the flow $\{\phi_t\}$ is a minimal geodesic of the Hofer metric. Moreover we have $d(\phi_0,\phi_1) = d_V(\phi_0,\phi_1)$.*

The proof of the theorem is based on the analysis of the bifurcation diagram of $H$. First one can show that the values $c^\pm(\phi_t^H)$ and $\gamma_\pm^H(t)$ agree for small $t$. Then a consequence of the Assumption 1 is that the diagram is a collection of curves which can be parametrized by the time $t$, and that the curves which are different from $\gamma_\pm^H$ cannot cross this last ones. The trouble is that the points $(t, c^\pm(\phi_t^H))$ in $\Sigma_H$ might leave the curves $\gamma_\pm^H$ because of a point $x$ which is a fixed extremum point until a time $\tau > 0$ and then stop being an extremum at that moment. We deal with this problem the same way as Siburg in [5], using a perturbation lemma.

## 1. Introduction

On considère l'espace symplectique standart $(\mathbb{R}^{2n},\omega)$. On note $\mathcal{D}$ le groupe $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n})$ des difféomorphismes Hamiltoniens à support compact.

Tout élément $\phi$ de $\mathcal{D}$ est l'application au temps 1 d'une isotopie $\{\phi_t^H\}$ solution de :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^H(x) = J\nabla H\big(t, \phi_t^H(x)\big), \quad \phi_0^H = \mathrm{id},$$

avec $J := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $H$ élément de $\mathrm{C}^\infty([0,1], \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}))$. $\{\phi_t^H\}$ est appelée isotopie engendrée par le Hamiltonien $H$.

DÉFINITION 1.1. – Pour $t \in ]0,1]$, on appelle point fixe du difféomorphisme $\phi_t^H$, tout point $x$ de $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant : $\phi_t^H(x) = x$. On notera $\mathrm{Fix}(\phi_t^H)$ cet ensemble.

On note alors $F_H := \bigcup_{t\in]0,1]}\{t\} \times \mathrm{Fix}(\phi_t^H)$ sous-ensemble de $[0,1] \times \mathbb{R}^{2n}$, et pour $(t,x)$ dans $F_H$, $t$ est appelé temps de retour de $x$.

### 1.1. Métrique de Hofer

Sur le groupe $\mathcal{D}$, on peut d'après Hofer [2,3] définir une topologie métrique de la façon suivante : pour $\phi \in \mathcal{D}$ l'énergie $E(\phi)$ de $\phi$ est donnée par

$$E(\phi) := \inf\big\{\|H\| \text{ tel que } \phi_1^H = \phi\big\},$$

où $\|H\| = \int_0^1(\sup H_t - \inf H_t)\,\mathrm{d}t$.

Le résultat fondamental démontré par Hofer est la non dégénérescence de l'énergie : $E(\phi) = 0$ si et seulement si $\phi = \mathrm{id}$.

Hofer définit une métrique bi-invariante sur le groupe $\mathcal{D}$ ainsi : $d(\phi,\psi) := E(\psi\phi^{-1})$. Qui plus est $\|H\|$ peut alors être considéré comme la longueur de l'isotopie $\{\phi_t^H\}$. La distance de Hofer entre deux difféomorphismes Hamiltoniens est donc définie comme l'infinimum de la longeur des courbes les reliant. Par conséquent il est naturel d'introduire la définition suivante :

DÉFINITION 1.2. – Une isotopie $\{\phi_t\}$ est une géodésique minimisante si et seulement si $\|H\| = d(\phi_0, \phi_1)$, où $H$ engendre $\{\phi_t\}$.

Une géodésique de la métrique de Hofer est une isotopie qui est minimisante localement par rapport au temps. Afin de caractériser les géodésiques Bialy et Poletrovich définissent dans [1] la notion d'Hamiltonien quasi-autonome :

DÉFINITION 1.3. – Un Hamiltonien $H$ est dit quasi-autonome si il existe un couple de points $(x^+, x^-)$ vérifiant pour tout $t \in [0,1]$ : $H_t(x^+) = \max H_t$, $H_t(x^-) = \min H_t$.

Bialy et Polterovich montrent alors qu'une isotopie de difféomorphismes Hamiltoniens est une géodésique si et seulement si elle est engendrée par un Hamiltonien quasi-autonome.

### 1.2. Diagramme de bifurcation

Rappelons alors que sur $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ on peut définir sur l'espace des courbes $\{z \in \mathrm{C}^1([0,1], \mathbb{R}^{2n}); z(0) = z(1)\}$ la fonctionnelle d'action :

$$A_H(z) = \int_0^1 \big(z^*\lambda - H\big(t, z(t)\big)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Où $-\lambda$ est n'importe quelle primitive de la forme symplectique standart $\omega$. Les trajectoires fermées du champ de vecteur $J\nabla H$ correspondent alors aux points critiques de $A_H$. L'ensemble des valeurs critiques de $A_H$ constituent le spectre d'action.

DÉFINITION 1.4. – On appelle spectre d'action de $\phi = \phi_1^H$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ :

$$\sigma_\phi := \left\{ A_H\left(\left\{\phi_t^H(x)\right\}_{0\leqslant t\leqslant 1}\right),\ x \in \mathrm{Fix}(\phi)\right\}.$$

On a alors le résultat suivant démontré dans [4] :

PROPOSITION 1.5. – *$\sigma(\phi)$ ne dépend que de $\phi$ et non de $H$ et est un sous-ensemble compact et nulle part dense de $\mathbb{R}$.*

On va considérer, toujours d'après Bialy et Polterovich, l'évolution du spectre d'action en fonction de $t$.

DÉFINITION 1.6. – On appelle diagramme de bifurcation de l'isotopie $\{\phi_t^H\}$ (ou de $H$) le sous-ensemble de $[0,1]\times\mathbb{R}$ :

$$\Sigma_H := \left\{(t,s),\ t \in ]0,1],\ s \in \sigma\left(\phi_t^H\right)\right\}.$$

Remarquons que si $H$ est quasi-autonome on peut alors distinguer deux courbes particulières dans le diagramme de bifurcation. On a en effet la courbe croissante de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$ (respectivement décroissante de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_-$) :

$$t \mapsto \gamma_+^H(t) = -\int_0^t H_s\left(x^-\right)\mathrm{d}s \quad \left(\text{respectivement } t \mapsto \gamma_-^H(t) = -\int_0^t H_s\left(x^+\right)\mathrm{d}s\right).$$

### 1.3. Métrique de Viterbo

Dans [6] Viterbo eu l'idée d'utiliser la théorie des fonctions génératrices afin d'associer à tout élément $\phi$ de $\mathcal{D}$ et à toute classe de cohomologie $\alpha$ dans $H^*(S^{2n})$ une valeur critique $c(\alpha,\phi)$ dans $\sigma(\phi)$. Pour $\mu \in H^{2n}(S^{2n})$ la classe maximale, on note $c^+(\phi) = c(\mu,\phi)$, et pour $1 \in H^0(S^{2n})$, on note $c^-(\phi) = c(1,\phi)$. Cela nous permet en particulier d'associer à toute isotopie $\{\phi_t^H\}$ deux nouvelles courbes continues dans le diagramme de bifurcation : $t \mapsto c^\pm(\phi_t^H)$.

Viterbo montre que la quantité $d_V(\mathrm{id},\phi) := c^+(\phi) - c^-(\phi)$ est alors une métrique bi-invariante sur le groupe $\mathcal{D}$.

De plus Bialy et Polterovich montrent dans [1] que la métrique de Hofer majore la métrique de Viterbo :

$$d_V(\mathrm{id},\phi) \leqslant d(\mathrm{id},\phi) \quad \text{pour tout } \phi \text{ dans } \mathrm{Ham}_c(M).$$

Dés lors une condition suffisante de minimalité pour une géodésique $\{\phi_t^H\}$ de la métrique de Hofer est que les égalités $c_+(\phi_1^H) = \gamma_+^H(1)$, $c_-(\phi_1^H) = \gamma_-^H(1)$ soient vérifiées.

## 2. Résultat principal

On considère maintenant un Hamiltonien $H$ appartenant à $\mathrm{C}^\infty([0,1],\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}))$, que l'on suppose quasi-autonome. On suppose qu'il existe au moins une paire d'extrema fixes $(x^+,x^-)$ telle que $x^+$ et $x^-$ soient isolés parmi les points critiques de $H_t$ pour tout $t$. Remarquons qu'il existe une sous-variété $M$ de $\mathbb{R}^{2n}$, compacte à bord, contenant le support de $H_t$ pour tout $t \in [0,1]$. Faisons alors l'hypothèse suivante sur $H$ :

HYPOTHÈSE 1. – Pour tout $t$ dans $]0,1[$, pour tout $x$ appartenant à $\mathrm{Fix}(\phi_t^H)\cap \mathring{M}$, 1 n'est pas valeur propre de $d\phi_t^H(x)$. De plus 1 n'est pas non plus valeur propre de $d\phi_1^H(x^\pm)$.

Cette hypothèse implique en particulier que pour tout temps $t$ dans $]0,1[$, le support de $\nabla H_t$ est égal à $M$.

Notre résultat est alors le suivant :

THÉORÈME 2.1. – *Soit $\{\phi_t\}$ une isotopie engendrée par un Hamiltonien $H$ quasi-autonome admettant un couple $(x^+, x^-)$ de maximum et minimum fixes isolés, et tel qu'il existe une variété compacte à bord $M$ contenant le support de $H_t$ pour tout temps $t$ et pour laquelle $H$ vérifie l'Hypothèse* 1.

*Alors l'isotopie $\{\phi_t\}$ est une géodésique minimisante pour la métrique de Hofer. On a de plus $d(\phi_0, \phi_1) = d_V(\phi_0, \phi_1)$ dans ce cas.*

*Remarque* 1. – Si l'on considère l'ensemble des Hamiltoniens $H$ tels que les fonctions $H_t$ aient leur support inclu dans une variété $M$, compacte sans bord, pour tout $t$, alors on peut montrer que pour un $H$ générique dans cet ensemble, les points $(t, x)$ dans $F_H \cap (]0,1] \times \overset{\circ}{M})$ pour lesquels 1 est valeur propre de l'application $d\phi_t^H(x)$ sont isolés.

## 3. Idées de la démonstration

Tout d'abord remarquons que l'on a d'une part, pour tout temps $t$, $\phi_t^H = \phi_t \phi_0^{-1}$, d'autre part, la métrique de Hofer étant bi-invariante, on a aussi $d(\phi_0, \phi_1) = d(\mathrm{id}, \phi_1^H)$. Il suffit donc de montrer que $\{\phi_t^H\}$ est une géodésique minimisante.

La démonstration du Théorème 2.1 repose sur l'analyse des propriétés du diagramme de bifurcation résultant de l'Hypothèse 1, puis d'un lemme de perturbation du Hamiltonien $H$ inspiré de Siburg [5]. Ce lemme permet de construire un Hamiltonien perturbé $K$ dont le diagramme de bifurcation associé est simple au sens de Bialy et Polterovich [1,4].

Tout d'abord, il est facile de voir à l'aide de la théorie des fonctions génératrices classiques et en utilisant l'équation de Hamilton Jacobi que pour tout temps $t$ suffisamment petit, on a $c^{\pm}(\phi_t^H) = \gamma_{\pm}^H(t)$.

On déduit ensuite de l'Hypothèse 1 quelques propriétés de l'ensemble $F_H$ associé à un tel Hamiltonien :

LEMME 3.1. – *L'ensemble $\{(t, x),\ t \in ]0,1[,\ x \in \mathrm{Fix}(\phi_t)\}$ est une sous-variété de dimension* 1 *de* $]0,1[\times \overset{\circ}{M}$.

En effet l'application :

$$\Phi : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, \qquad (t, x) \mapsto \big(x, \phi_t^H(x)\big)$$

est transverse à la diagonale sur $]0,1[\times \overset{\circ}{M}$.

On montre de plus que cette sous-variété est réunion de courbes paramétrables par le temps de retour $t$, et que pour tout temps $t > 0$ les points $(t, x^+)$ et $(t, x^-)$ sont isolés parmi les points de $F_H$.

La démonstration du Théorème 2.1 résulte alors du lemme et de la proposition ci-après :

LEMME 3.2. – *Pour un Hamiltonien $H$ vérifiant les hypothèses du Théorème* 2.1*, on a pour toute courbe $\{x_s\}_{t_1 \leqslant s \leqslant t_2}$ de points fixes paramétrée par le temps de retour* :

$$A_H\big(\{\phi_s(x_{t_2})\}_{0\leqslant s\leqslant t_2}\big) - A_H\big(\{\phi_s(x_{t_1})\}_{0\leqslant s\leqslant t_1}\big) = -\int_{t_1}^{t_2} H_s(x_s)\,\mathrm{d}s.$$

Ce lemme est une conséquence du théorème de Stokes appliqué à la 1-forme $\alpha := p\,\mathrm{d}q - H\,\mathrm{d}t$ sur la surface

$$\mathcal{S} := \big\{\phi_s(x_t),\ \text{pour } t_1 \leqslant t \leqslant t_2,\ 0 \leqslant s \leqslant t\big\}.$$

On déduit du Lemme 3.2 que la courbe image dans le diagramme de bifurcation d'une courbe $\{(s, x_s)\}$ dans $F_H$ paramétrée par le temps de retour croît (respectivement décroît) moins vite que la courbe $\gamma_+^H$ (respectivement $\gamma_-^H$). Par conséquent, la courbe $t \mapsto c^+(\phi_t^H)$ (respectivement $t \mapsto c^-(\phi_t^H)$) ne peut quitter la courbe $t \mapsto \gamma_+^H(t)$ (respectivement $t \mapsto \gamma_-^H(t)$) uniquement dans le cas où il existe un point $x$ qui est point de minimum fixe (respectivement maximum fixe) jusqu'à un temps $\tau > 0$ et qui cesse de l'être à partir de ce moment là.

Une technique de perturbation dûe à Siburg [5] nous permet alors de transformer $H$ en un Hamiltonien $K$ pour lequel $x^-$ (respectivement $x^+$) est l'unique point de minimum absolu de $K_t$ pour tout temps $t$ (respectivement l'unique point de maximum absolu de $K_t$ pour tout temps $t$). Le fait que $x^+$ et $x^-$ soient isolés dans $F_H$, nous permettant de perturber $H$ au voisinage de ces points sans ajouter de nouveaux points fixes.

On montre ainsi la proposition suivante :

PROPOSITION 3.3. – *Soit $H$ vérifiant les hypothèses du théorème, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un Hamiltonien $K$ vérifiant* :

(1) $\|H - K\| < \varepsilon$ ;

(2) *$K$ admet les mêmes extrema fixes $x^+$ et $x^-$ que $H$ et pour tout $t$ dans* $]0, 1]$, *on a* :

$$c_+\big(\phi_t^K\big) = \gamma_+^K(t), \qquad c_-\big(\phi_t^K\big) = \gamma_-^K(t).$$

La démonstration de cette proposition est très largement inspirée d'un lemme de K.F. Siburg dans [5]. On construit la perturbation de manière à ce que le diagramme de bifurcation de $K$ soit simple au sens de Bialy et Polterovich [1,4].

Montrons que l'on peut déduire le Théorème 2.1 de la Proposition 3.3 :
en effet, de (2) on déduit que

$$\|K\| \geqslant d\big(\mathrm{id}, \phi_1^K\big) \geqslant c_+\big(\phi_1^K\big) - c_-\big(\phi_1^K\big) = \|K\|.$$

Donc $\|K\| = d(\mathrm{id}, \phi_1^K)$ et $\{\phi_t^K\}$ est une géodésique minimisante.

Le (1) implique alors :

$$\begin{aligned}
\|H\| &\leqslant \|K\| + \|H - K\| \leqslant d\big(\mathrm{id}, \phi_1^K\big) + \varepsilon \\
&\leqslant d\big(\mathrm{id}, \phi_1^H\big) + d\big(\phi_1^H, \phi_1^K\big) + \varepsilon \leqslant d\big(\mathrm{id}, \phi_1^H\big) + \|H - K\| + \varepsilon \\
&\leqslant d\big(\mathrm{id}, \phi_1^H\big) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\|H\| = d(\mathrm{id}, \phi_1^H)$ et donc $\{\phi_t^H\}$ est bien une géodésique minimisante.

## Références bibliographiques

[1] M. Bialy, L. Polterovich, Geodesics of Hofer's metric on the group of Hamiltonian diffeomorphisms, Duke Math. J. 76 (1994) 273–292.
[2] H. Hofer, On the topological properties of symplectic maps, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 115 (1990) 25–38.
[3] H. Hofer, Estimates for the energy of a symplectic map, Comment. Math. Helv. 68 (1993) 48–72.
[4] H. Hofer, E. Zehnder, Symplectic Invariants and Hamiltonien Dynamics, Progress in Math., Birkhäuser, 1994.
[5] K.F. Siburg, New minimal geodesics in the group of symplectic diffeomorphisms, Calc. Var. 3 (1995) 299–309.
[6] C. Viterbo, Symplectic topology as the geometry of generating functions, Math. Ann. 292 (1992) 685–710.