C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 117–120

Théorie des nombres/*Number Theory*

Nombres de Liouville et nombres normaux

Yann Bugeaud

Université Louis Pasteur, UFR de mathématiques, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France

Reçu le 2 avril 2002 ; accepté le 3 juin 2002

Note présentée par Jean-Pierre Kahane.

Résumé Nous montrons qu'il existe des nombres de Liouville normaux ainsi que des nombres de Liouville qui ne sont normaux dans aucune base. ***Pour citer cet article : Y. Bugeaud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 117–120.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Liouville numbers and normal numbers

Abstract We prove that there exist Liouville numbers which are normal, as well as Liouville numbers which are non-normal to any base. ***To cite this article: Y. Bugeaud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 117–120.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Suite à [9], où se trouvent construits les premiers exemples explicites de nombres transcendants, un nombre réel irrationnel ξ est dit *de Liouville* si, pour tout entier positif w, il existe un rationnel p/q avec $q \geqslant 2$ tel que $|\xi - p/q| < q^{-w}$. L'ensemble $\mathcal{L}$ des nombres de Liouville est de dimension de Hausdorff nulle (cela se déduit, par exemple, du théorème de Jarník–Besicovitch, voir [6, p. 264]) et de h-mesure de Hausdorff infinie pour toute fonction dimension h qui croît au voisinage de l'origine plus vite que toute fonction puissance [1]. Suivant la terminologie de Borel [4], l'entier $b \geqslant 2$ étant fixé, un nombre réel ξ est dit *simplement normal en base b* si chaque chiffre $0, \dots, b-1$ apparaît dans le développement de ξ en base b avec une fréquence égale à $1/b$. Il est dit *normal* s'il est simplement normal en toute base $b \geqslant 2$. L'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres normaux est de mesure de Lebesgue totale, et la dimension de Hausdorff de son complémentaire est égale à 1. Ces simples considérations métriques ne permettent de prouver ni l'existence, ni la non-existence, de nombres de Liouville normaux dans une base fixée. Dans cette Note, nous résolvons ce problème à l'aide, d'une part, d'une construction semi-explicite et, d'autre part, de l'analyse de Fourier.

Le Théorème 1 assure que l'ensemble des nombres de Liouville qui ne sont normaux dans aucune base n'est pas « trop petit ».

THÉORÈME 1. – *Il existe des nombres de Liouville qui ne sont normaux dans aucune base entière. En outre, l'ensemble de ces nombres est de h-mesure de Hausdorff infinie pour toute fonction dimension h qui croît au voisinage de l'origine plus vite que toute fonction puissance.*

Ainsi que l'explique Montgomery [10, p. 203], si un ensemble $\mathcal{E}$ de nombres réels est le support d'une mesure de probabilité μ dont la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini, mais pas trop lentement, alors, grâce à un résultat de Davenport, Erdős et LeVeque [5], μ-presque tout élément de $\mathcal{E}$ est normal. Tel est le

Adresse e-mail : bugeaud@math.u-strasbg.fr (Y. Bugeaud).

S1631-073X(02)02456-1/FLA

cas si $\mathcal{E}$ est l'ensemble des nombres réels à quotients partiels bornés [7] ou encore, pour tout réel $w > 1$, si $\mathcal{E}$ est l'ensemble $\mathcal{K}_w$ des nombres réels ξ approchables à l'ordre $2w$ par des rationnels (i.e. tels que l'équation $|\xi - p/q| < 1/q^{2w}$ possède une infinité de solutions rationnelles) [8]. Nous suivons cette démarche afin de démontrer le Théorème 2 ci-dessous.

THÉORÈME 2. – *Il existe des nombres de Liouville normaux.*

Les démonstrations des Théorèmes 1 et 2 s'inspirent grandement de plusieurs résultats antérieurs, aussi, plutôt que d'en donner tous les détails, nous choisissons de présenter les idées directrices et de renvoyer le lecteur aux articles originaux.

Démonstration du Théorème 1. – Elle combine une construction de Pollington [11] et une idée de Baker [1]. Pour tout réel $w > 1$, Pollington [11] a déterminé la dimension de Hausdorff de l'ensemble des nombres réels appartenant à $\mathcal{K}_w$ et normaux dans aucune base. Pour cela, posant $g : x \mapsto x^{1/w}$ et $f : x \mapsto x^{-w} \log x$, il considère une famille dénombrable $\mathcal{I}$ d'intervalles telle que

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} g\big(|I|\big) < 1,$$

où $|I|$ désigne la longueur de l'intervalle I. Puis, une suite $(s_j)_{j \geqslant 0}$ d'entiers dans laquelle tous les entiers suffisamment grands apparaissent une infinité de fois étant fixée, il construit inductivement des ensembles emboîtés

$$[0,1] = I_0 \supset J_1 \supset I_1 \supset J_2 \supset \cdots,$$

une suite strictement croissante d'entiers positifs $(K_j)_{j \geqslant 1}$ et une suite d'entiers positifs $(k_j)_{j \geqslant 0}$ possédant les propriétés suivantes. Pour tout $j \geqslant 1$, l'ensemble J_j est réunion finie d'intervalles fermés disjoints de longueur $\eta_j := f(K_j) = K_j^{-w} \log K_j$, centrés en des rationnels de dénominateurs comparables à $K_j^{1/2}$, et ne rencontre aucun intervalle $I \in \mathcal{I}$ tel que $\eta_j < |I| \leqslant \mu_{j-1}$, où $\mu_{j-1} := s_{j-1}^{-k_{j-1}}$. Pour tout $j \geqslant 1$, l'ensemble I_j est réunion finie d'intervalles disjoints de longueur $\mu_j := s_j^{-k_j}$ et ne rencontre aucun intervalle $I \in \mathcal{I}$ tel que $\mu_j < |I| \leqslant \eta_j$. De plus, pour tout $\xi \in I_j$, le chiffre $s_j - 1$ apparaît au plus $k_j/(2s_j)$ fois dans le développement de ξ en base s_j. L'ensemble

$$J := \bigcap_{j=1}^{\infty} J_j = \bigcap_{i=0}^{\infty} I_i$$

est alors non vide et ne rencontre aucun intervalle de $\mathcal{I}$. La définition des J_j montre que J est inclus dans $\mathcal{K}_w$, et celle des I_j entraîne qu'aucun point de J n'est normal en base s, dès que s apparaît une infinité de fois dans la suite $(s_j)_{j \geqslant 1}$. Il en résulte que la famille $\mathcal{I}$ ne recouvre pas l'ensemble $\mathcal{K}_w \cap \mathcal{N}$, et donc que cet ensemble possède une g-mesure de Haudorff positive.

Afin de démontrer le Théorème 1, nous modifions deux points de la méthode de Pollington. D'une part, au lieu de la fonction g, nous prenons, comme Baker [1], une fonction h qui croît à l'origine plus vite que toute fonction puissance, c'est-à-dire telle que, pour tout $\delta > 0$, on ait $t^\delta = \mathrm{O}(h(t))$ au voisinage de l'origine. D'autre part, nous n'utilisons plus à chaque pas j la même fonction f, mais nous choisissons, pour tout $j \geqslant 1$, la fonction $f_j : x \mapsto x^{-j} \log x$. Il est alors facile de voir que l'on peut suivre ligne à ligne la démonstration du pas récurrent de [11], en choisissant, à chaque étape, un entier K_j suffisamment grand, dont l'existence est assurée par les propriétés de croissance de la fonction h. Nous obtenons ainsi un ensemble de nombres de Liouville, normaux en aucune base, disjoint de la famille $\mathcal{I}$, donc de h-mesure strictement positive.

Pour citer cet article : Y. Bugeaud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 117–120

Démonstration du Théorème 2. – Un théorème de Davenport, Erdős et LeVeque [5] affirme que si $(s_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels et si μ est une mesure de probabilité à support dans un ensemble réel $\mathcal{E}$ telle que la série

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^3} \sum_{m,n=1}^{N} \hat{\mu}\bigl(\ell(s_m - s_n)\bigr)$$

converge pour tout entier ℓ non nul, alors la suite $(s_n x)_{n\geqslant 1}$ est uniformément répartie modulo 1 pour μ-presque tout x appartenant à $\mathcal{E}$. Pour démontrer le Théorème 2, il suffit donc de construire une mesure à support dans l'ensemble des nombres de Liouville, dont la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini, mais pas trop lentement. À cet effet, nous utilisons un résultat de Bluhm [2,3], qui reprend des idées de Kaufman [8]. Pour tout nombre réel M et tout entier $k \geqslant 1$, on pose

$$E(M,k) := \bigcup_{\substack{M\leqslant p<2M \\ p \text{ premier}}} \bigl\{x \in \mathbf{R} : \|px\| \leqslant p^{-1-k}\bigr\}.$$

On désigne par $\mathcal{F}\Psi$ la transformée de Fourier d'une fonction Ψ.

LEMME. – *Soit $k \geqslant 1$ un entier et soit θ_k la fonction $x \mapsto (1+|x|)^{-1/(3+k)}$. Pour toute fonction Ψ de classe C^2 à support compact et pour tout $\delta > 0$, il existe un entier $M_0 = M_0(\Psi, \delta)$ et, pour tout $M \geqslant M_0$, une fonction g_M de classe C^2, de période 1, telle que*

$$\operatorname{supp}(g_M) \subset E(M,k), \qquad \mathcal{F}g_M(0) = 1$$

et

$$\bigl|\mathcal{F}(\Psi g_M)(x) - \mathcal{F}\Psi(x)\bigr| \leqslant \delta\theta_k(x), \quad \textit{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Le lemme correspond au Lemme 3.2 de [2], avec cependant un choix différent de θ_k, destiné à simplifier les quelques calculs ultérieurs. Précisons qu'il s'agit du produit Ψg_M et non de la composition des deux fonctions.

Dans [3], Bluhm construit une mesure positive μ_∞, à support inclus dans l'ensemble $\mathcal{L}$, comme limite au sens de la convergence faible d'une suite de Cauchy de mesures $(\mu_k)_{k\geqslant 1}$. Pour cela, il fixe une fonction positive Ψ_0 de classe C^2, à support dans $[0,1]$ et d'intégrale égale à 1. Le lemme assure alors l'existence d'un nombre $M_1 = M_1(\Psi_0, 3^{-1})$ et d'une fonction g_{M_1} de classe C^2, à support dans $E(M_1, 1)$, telle que $\mathcal{F}g_{M_1}(0) = 1$ et

$$\bigl|\mathcal{F}(\Psi_0 g_{M_1})(x) - \mathcal{F}\Psi_0(x)\bigr| \leqslant 3^{-1}\theta_1(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Par applications successives du lemme, nous obtenons, pour tout entier $\ell \geqslant 2$, un nombre $M_\ell = M_\ell(\Psi_0 g_{M_1} \dots g_{M_{\ell-1}}, 3^{-\ell})$ et une fonction g_{M_ℓ} de classe C^2, à support dans $E(M_\ell, \ell)$, telle que $\mathcal{F}g_{M_\ell}(0) = 1$ et

$$\bigl|\mathcal{F}(\Psi_0 g_{M_1} \dots g_{M_{\ell-1}} g_{M_\ell})(x) - \mathcal{F}(\Psi_0 g_{M_1} \dots g_{M_{\ell-1}})(x)\bigr| \leqslant 3^{-\ell}\theta_\ell(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Pour tout entier $\ell \geqslant 1$, on pose $\mu_\ell = \Psi_0 g_{M_1} \dots g_{M_\ell} \lambda$, où λ désigne la mesure de Lebesgue. Si μ_0 est la mesure $\Psi_0\lambda$, les inégalités précédentes se réécrivent, pour tout $\ell \geqslant 1$ et tout réel x,

$$\bigl|\hat{\mu}_\ell(x) - \hat{\mu}_{\ell-1}(x)\bigr| \leqslant 3^{-\ell}\theta_\ell(x),$$

d'où l'on déduit que la suite $(\hat{\mu}_\ell)_{l\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy pour la norme sup. Comme $\mathcal{F}g_{M_\ell}(0) = 1$ pour tout entier $\ell \geqslant 0$, elle converge pour la topologie faible vers une mesure positive μ_∞, dont le support est inclus dans l'intersection des ensembles $E(M_\ell, \ell)$, donc dans $\mathcal{L}$.

Un rapide calcul montre l'existence d'une constante absolue $c_1 > 0$ telle que $3^{-k}\theta_k(x)$ est inférieur à $\exp\{-c_1\sqrt{\log(1+|x|)}\}$. Écrivant alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\theta_k(x) \leqslant \sum_{k=1}^{[\sqrt{\log(1+|x|)}]} 3^{-k}\theta_k(x) + \sum_{k=[\sqrt{\log(1+|x|)}]+1}^{\infty} 3^{-k}\theta_k(x)$$

$$\leqslant \left[\sqrt{\log(1+|x|)}\right] \exp\left\{-c_1\sqrt{\log(1+|x|)}\right\} + \frac{3^{-[\sqrt{\log(1+|x|)}]}}{2},$$

et tenant compte du fait que $\mathcal{F}\Psi_0(x) = \mathrm{O}(|x|^{-2})$, il existe une constante absolue $c_2 > 0$ telle que

$$\hat{\mu}_\infty(x) \leqslant \exp\left\{-c_2\sqrt{\log(1+|x|)}\,\right\}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer le résultat de Davenport, Erdős et LeVeque mentionné ci-dessus avec $s_n = b^n$, pour tout entier $n \geqslant 1$, afin de montrer que μ_∞-presque tout élément de $\mathcal{L}$ est simplement normal en base b. Par suite, μ_∞-presque tout élément de $\mathcal{L}$ est normal.

Le fait que $b > 1$ est entier n'intervient pas dans la démonstration, qui permet donc d'obtenir un résultat légèrement plus fort que celui annoncé.

Références bibliographiques

[1] R.C. Baker, On approximation with algebraic numbers of bounded degree, Mathematika 23 (1976) 18–31.

[2] C. Bluhm, On a theorem of Kaufman: Cantor-type construction of linear fractal Salem sets, Ark. Mat. 36 (1998) 307–316.

[3] C. Bluhm, Liouville numbers, Rajchman measures, and small Cantor sets, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000) 2637–2640.

[4] É. Borel, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Circ. Math. Palermo 27 (1909) 247–271.

[5] H. Davenport, P. Erdős, W.J. LeVeque, On Weyl's criterion for uniform distribution, Michigan Math. J. 10 (1963) 311–314.

[6] G. Harman, Metric Number Theory, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[7] R. Kaufman, Continued fractions and Fourier transforms, Mathematika 27 (1980) 262–267.

[8] R. Kaufman, On the theorem of Jarník and Besicovitch, Acta Arith. 39 (1981) 265–267.

[9] J. Liouville, Remarques relatives à des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, C. R. Acad. Sci. Paris 18 (1844) 883–885, et 910–911.

[10] H.M. Montgomery, Ten Lectures on the Interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[11] A.D. Pollington, The Hausdorff dimension of a set of non-normal well approximable numbers, in: Number Theory, Carbondale, 1979, Lectures Notes in Math., Vol. 751, Springer-Verlag, Berlin, 1979, pp. 256–264.