C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 23–26

Analyse complexe/*Complex Analysis*

Estimées C^k pour les domaines convexes de type fini de $\mathbb{C}^n$

William Alexandre

Université des sciences et technologies de Lille, Laboratoire d'arithmétiques, géométrie, analyse, topologie, UMR CNRS 8524 U.F.R. de mathématiques, Bât M2, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

Reçu et accepté le 29 avril 2002

Note présentée par Jean-Pierre Demailly.

Résumé Pour tout domaine convexe D, relativement compact de $\mathbb{C}^n$, de type fini m et pour tout q entier naturel non nul, nous montrons l'existence d'un opérateur T_q^* de $C_{0,q}(\overline{D})$ vers $C_{0,q-1}(\overline{D})$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour toute $(0,q)$-forme f, de régularité C^k jusqu'au bord, $\overline{\partial}$-fermée, $T_q^* f$ est de régularité $C^{k+1/m}$ jusqu'au bord et $\overline{\partial} T_q^* f = f$. Diederich, Fischer et Fornaess ont montré l'existence d'un opérateur de résolution du problème du $\overline{\partial}$ qui satisfait ces conditions pour $k = 0$. Suivant une méthode initiée par Lieb et Range, nous allons modifier cet opérateur et montrer la régularité $C^{k+1/m}$. Pour cela, nous utiliserons les outils et résultats spécifiques des convexes de type fini obtenus par McNeal, Diederich, Fischer et Fornaess, mais nous aurons besoin de nouvelles estimées dans la direction normale au bord de D. ***Pour citer cet article : W. Alexandre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 23–26.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

C^k estimates for convex domains of finite type in $\mathbb{C}^n$

Abstract For all convex domains D of finite type m, relatively compact of $\mathbb{C}^n$ and for all $q \in \mathbb{N}^*$, we show that there exists a linear operator T_q^* from $C_{0,q}(\overline{D})$ to $C_{0,q-1}(\overline{D})$, such that for all $k \in \mathbb{N}$ and all $(0,q)$-form f, $\overline{\partial}$-closed of regularity C^k up to the boundary, $T_q^* f$ is of regularity $C^{k+1/m}$ up to the boundary and $\overline{\partial} T_q^* f = f$. Diederich, Fischer and Fornaess have shown that there exists for $k = 0$ such an operator. We modify this operator, analogously to the method of Lieb and Range, and show the regularity $C^{k+1/m}$ for all k. To do this, we use the specific tools and results of convex domains of finite type shown and used by Diederich, Fischer, Fornaess and McNeal but need to show new estimates for the normal derivative of the defining function of D. ***To cite this article: W. Alexandre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 23–26.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Soit D un domaine convexe relativement compact de $\mathbb{C}^n$ et de type fini m. Notons r sa fonction définissante C^∞ convexe sur $\mathbb{C}^n$, de gradient non nul dans un voisinage de bD.

Dans un premier temps on généralise les estimées de la Proposition 3.1.vii de [2] en tenant compte de la direction normale. Nous adoptons les mêmes notations que [2,3] : Soit $\zeta \in bD$, $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ une base

Adresse e-mail : alexandr@agat.univ-lille1.fr (W. Alexandre).

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés
S1631-073X(02)02417-2/FLA

orthonormée de $\mathbb{C}^n$ telle que $\omega_1 = n_\zeta$ soit la normale unitaire extérieure à bD en ζ. On note r_ζ l'expression de r dans le repère associé centré en ζ et $\omega_j = x_j + \mathrm{i}y_j$.

LEMME 0.1. – *Il existe $c > 0$, $R > 0$ et un voisinage W de bD tel que pour tout $\zeta \in W$, et tout $z = \lambda n_\zeta + \mu v$, où $v \in T_\zeta^{\mathbb{C}} bD$, $\|v\| = 1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $|\lambda|, |\mu| < R$, on a* :

$$\left|\frac{\partial r_\zeta}{\partial y_1}(\lambda n_\zeta + \mu v)\right| \leqslant c\left(|\lambda| + \sqrt{\sum_{j=2}^{m} \sum_{\substack{0\leqslant\alpha,\beta\leqslant j\\ \alpha+\beta=j}} \left|\frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^j r_{\zeta^{(0)}}(\mu v)}{\partial\mu^\alpha \partial\overline{\mu}^\beta}\right|_{\mu=0} |\mu|^j}\right), \tag{1}$$

$$\left|\frac{\partial r_\zeta}{\partial x_1}(\lambda n_\zeta + \mu v) - \frac{\partial r_\zeta}{\partial x_1}(0)\right| \leqslant c\left(|\lambda| + \sqrt{\sum_{j=2}^{m} \sum_{\substack{0\leqslant\alpha,\beta\leqslant j\\ \alpha+\beta=j}} \left|\frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^j r_{\zeta^{(0)}}(\mu v)}{\partial\mu^\alpha \partial\overline{\mu}^\beta}\right|_{\mu=0} |\mu|^j}\right). \tag{2}$$

Démonstration. – On procède en plusieurs étapes. En dimension 2, en utilisant la convexité de r_ζ et des développements de Taylor, on montre l'existence d'un voisinage de Fréchet de r_ζ telle que pour toute fonction convexe ρ de ce voisinage les inégalités (1) et (2) soient vraies pour c ne dépendant que de r_ζ. Pour le cas général, on fixe $\zeta_0 \in bD$ et $v_0 \in T_{\zeta_0}^{\mathbb{C}} bD$. Sur span$\{v_0, n_\zeta\}$ nous obtenons un c_{ζ_0,v_0} et le voisinage de Fréchet fournit un voisinage V_{ζ_0,v_0} de (ζ_0, v_0) tel que (1) et (2) soient vraies pour tous $(\zeta, v) \in V_{\zeta_0,v_0}$. Un argument de compacité donne c indépendant de ζ et v. □

On traduit maintenant ces inégalités en langage des $\mathcal{P}_\varepsilon(\zeta)$: les polydisques de McNeal centrés en ζ (*voir* [2] ou [5]). On note $\tau_i(\zeta, \varepsilon) = \sup\{R > 0,\ \forall\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| < R,\ |r(\zeta + \lambda\omega_i)| < \varepsilon\}$.

LEMME 0.2. – *Pour tous multi-indices α_0 et β_0, avec $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, il existe $c_{\alpha_0,\beta_0} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, tout $\zeta^{(0)} \in bD$ et tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta^{(0)})$, l'inégalité suivante soit vraie* :

$$\left|\frac{\partial^{1+|\alpha_0|+|\beta_0|} r_{\zeta^{(0)}}}{\partial\overline{\omega_1}\partial\omega^{\alpha_0}\partial\overline{\omega}^{\beta_0}}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^{1+|\alpha_0|+|\beta_0|} r_{\zeta^{(0)}}}{\partial\omega_1\partial\omega^{\alpha_0}\partial\overline{\omega}^{\beta_0}}(\zeta)\right| \leqslant c_{\alpha_0,\beta_0} \frac{\varepsilon^{1/2}}{\tau(\zeta^{(0)}, \varepsilon)^{\alpha_0+\beta_0}}.$$

Démonstration. – De la Proposition 3.1 (v) et (vi) de [2] et du Lemme 0.1 on déduit :

$$\left|\frac{\partial r_{\zeta^{(0)}}}{\partial\omega_1}(\zeta) - \frac{\partial r_{\zeta^{(0)}}}{\partial\omega_1}(0)\right| \leqslant c'\varepsilon^{1/2} \quad \forall\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta^{(0)}).$$

En effectuant un développement de Taylor en $\zeta^{(0)}$ à l'ordre $m + |\alpha_0| + |\beta_0|$, nous en déduisons par équivalence des normes sur les espaces vectoriels de dimensions finies que tous les coefficients du développement satisfont l'inégalité recherchée (avec le même c_{α_0,β_0}) en $\zeta^{(0)}$. En développant à l'ordre m en $\zeta^{(0)}$ la fonction $\partial^{1+|\alpha_0|+|\beta_0|} r_{\zeta^{(0)}}/\partial\omega_1\partial\omega^{\alpha_0}\partial\overline{\omega}^{\beta_0}$, nous obtenons le résultat pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta^{(0)})$. □

Nous rappelons la fonction de support de Diederich–Fornaess et les noyaux intégraux. On note S la fonction de support construite dans [3]. Elle est définie dans un repère centré en ζ et de base $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ par :

$$S_\zeta(\omega) = 3\omega_1 + K\omega_1^2 - c\sum_{j=2}^{\hat{m}} M^{2^j}\sigma_j \sum_{\substack{|\alpha|=j\\ \alpha_1=0}} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^j r_\zeta}{\partial\omega^\alpha}(0)\omega^\alpha.$$

Soit $\Phi(\zeta)$ la matrice de passage de la base canonique à $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, $Q_\zeta^{(j)}(\omega) = \int_0^1 \frac{\partial S_\zeta}{\partial\omega_j}(t\omega)\,\mathrm{d}t$ et $Q(z, \zeta) = (Q_1(z, \zeta), \ldots, Q_n(z, \zeta)) := \Phi(\zeta)^t (Q_\zeta^{(1)}(\Phi(\zeta)(z - \zeta)), \ldots, Q_\zeta^{(n)}(\Phi(\zeta)(z - \zeta))$ de sorte que

$\sum_{j=1}^n Q_j(z,\zeta)(\zeta_j - z_j) = S(z,\zeta)$ (*voir* [2]). On pose

$$\eta_0(z,\zeta) = \sum_{j=1}^n \frac{\overline{\zeta_j - z_j}}{|\zeta - z|^2}\,\mathrm{d}\zeta_j \quad \text{et} \quad \eta_1(z,\zeta) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j(z,\zeta)}{S(z,\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta_j,$$
$$\eta(z,\zeta,\lambda) = (1-\lambda)\eta_0(z,\zeta) + \lambda\eta_1(z,\zeta),$$
$$\Omega_{n,q} = \frac{(-1)^{q(q-1)/2}}{(2\mathrm{i}\pi)^n}\binom{n-1}{q}\,\eta \wedge (\overline{\partial}_z\eta)^q \wedge (\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\eta)^{n-q-1}.$$

On note $B_{n,q-1}$ le noyau de Bochner–Martinelli, $K_{n,q} = \Omega_{n,q}$ restreint à $\lambda = 1$. Pour $f \in C_{0,q}(\overline{D}),\ q \geqslant 1$, $z \in D$, on pose :

$$T_q(f)(z) = \int_{(\zeta,\lambda)\in bD\times[0,1]} f(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-1}(z,\zeta,\lambda) - \int_{\zeta\in bD} f(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(z,\zeta,\lambda).$$

Remarque 1. – Comme $S(z,\zeta) = 0$ n'est pas a exclure si la distance entre ζ et z est grande il faut globaliser $S(z,\zeta)$ (*voir* [1]). Bien que cette modification complique le raisonnement suivant, il n'est nullement mis en danger.

T_q résout le problème du $\overline{\partial}$ et Diederich, Fischer et Fornaess ont montré dans [2] qu'il satisfait les estimées $C^{1/m}$. On modifie T_q en T_q^* comme l'ont fait Lieb et Range dans [4] pour donner les estimées C^k sur les domaines strictements pseudoconvexes. Soit $G := \{z,\ 0 \leqslant r(z) < \alpha\}$, pour $\alpha > 0$ suffisamment petit et $E : C^0(\overline{D}) \to C^0(D \cup G)$ l'opérateur de prolongement de type Seeley utilisé dans [4]. On pose pour $f \in C^0_{0,q}(\overline{D})$, $q \geqslant 1$:

$$T_q^* f = T_q f + M_q f,$$

où

$$M_1(f)(z) = \int_{\zeta\in G} (Ef)(\zeta) \wedge K_{n,0}(z,\zeta),$$
$$M_q(f)(z) = \overline{\partial}_z \int_{(\zeta,\lambda)\in G\times[0,1]} Ef(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-2}(z,\zeta,\lambda), \quad 2 \leqslant q \leqslant n.$$

$M_q(f)$ est une intégrale de volume tenant compte de la direction normale et puisque $\overline{\partial}_z M_q f = 0$, T_q^* résout aussi le problème du $\overline{\partial}$.

Le théorème de Stokes implique si $f \in C^1_{0,q}(\overline{D})$:

$$T_q^* f(z) = -\int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta (Ef)(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-1}(z,\zeta,\lambda) - \int_{G\cup D} Ef(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(z,\zeta).$$

Si $k = 0$ les résultats de [2] suffisent encore pour montrer que $T_q^* f$ est de régularité $\mathrm{C}^{1/m}$. Mais si $k > 0$ il faut des résultats nouveaux. Dans [2], on ne considère que les composantes tangentielles du noyau qui ont un ordre d'annulation supérieur. Par rapport à l'intégrale sur le bord, le gain d'une variable d'intégration supplémentaire ne suffit pas pour compenser la composante normale du noyau. Les estimées de notre première partie permettent de gagner un facteur $\varepsilon^{1/2}$ sur le polydisque $\mathcal{P}_\varepsilon(\zeta)$: Pour donner les estimées optimales, on introduit l'opérateur de différentiation $\delta_j = \partial/\partial z_j + \partial/\partial\zeta_j$ et on manipule $T_q' f := \int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Ef \wedge \Omega_{n,q-1}$ comme dans [6] pour obtenir :

$$\frac{\partial T_q' f}{\partial z_j} = \int_G \left(\frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j} - E\frac{\partial f}{\partial \zeta_j} \right) \wedge K_{n,q-1} - \int_{G\cup D} \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j} \wedge B_{n,q-1} - T_q^* \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_j} \right)$$
$$+ \int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Ef \wedge \delta_j \Omega_{n,q-1} + \int_{G\times[0,1]} \left(\frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j} - E\frac{\partial f}{\partial \zeta_j} \right) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}. \tag{3}$$

Cette expression nous permet de procéder par récurrence : les estimées C^{k-1} donnent la majoration de $T_q^*(\partial f/\partial\zeta_j)$, reste alors à traiter les autres termes. Comme dans [2], on fixe $z^{(0)} \in D$, $\zeta^{(0)} \in bD$ tels que $|z^{(0)} - \zeta^{(0)}| = d(z^{(0)}, bD) = \rho$ et on montre les deux lemmes suivants :

LEMME 0.3. – *Pour $i, j, k = 1, \dots, n$, on a uniformément en $z^{(0)}$ pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta^{(0)})$:*

$$\left|\delta_i S\left(z^{(0)}, \zeta\right)\right| \lesssim (\varepsilon+\rho)^{1/2},$$
$$\left|\delta_i Q_j\left(z^{(0)}, \zeta\right)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(\zeta^{(0)}, \varepsilon)\tau_i'(\zeta^{(0)}, \varepsilon)},$$
$$\left|\delta_i \frac{\partial Q_j}{\partial \overline{\zeta_k}}(z^{(0)}, \zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(\zeta^{(0)}, \varepsilon)\tau_i'(\zeta^{(0)}, \varepsilon)\tau_k'(\zeta^{(0)}, \varepsilon)},$$

où $\tau_l'(\zeta^{(0)}, \varepsilon) = \tau_l(\zeta^{(0)}, \varepsilon)$, si $l \neq 1$ et $\tau_1'(\zeta^{(0)}, \varepsilon) = \tau_1(\zeta^{(0)}, \varepsilon)^{1/2}$.

Démonstration. – Après un changement de base et en remarquant que δ_j n'agit que sur les termes en $\partial r_\zeta/\partial\omega^\beta$, le Lemme 0.2 fournit le résultat.

LEMME 0.4. – *Soit $g = \overline{\partial}_\zeta Ef$ ou $\partial Ef/\partial\zeta_j - E\partial f/\partial\zeta_j$. Pour tout $j \leqslant k-1$ et pour tout $\zeta \in bD$, $\varepsilon > 0$, on a :*

$$\left|g(\zeta)\right| \leqslant c_j \|g\|_{j,V}\, \varepsilon^j, \quad \forall \zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon\left(\zeta^{(0)}\right) \setminus D.$$

Ceci fournit dans (3) des ε manquants lors des dérivations successives du noyau. Ainsi, en réutilisant (3) et les Lemmes 0.2, 0.3 et 0.4 à plusieurs reprises, on obtient par récurrence les estimées $C^{k+1/m}$.

Références bibliographiques

[1] W. Alexandre, Construction d'une fonction de support à la Diederich–Fornaess, Publ. IRMA, Lille 54 (III) (2001).
[2] K. Diederich, B. Fischer, J.E. Fornaess, Hölder estimates on convex domains of finite type, Math. Z. 232 (1999) 43–61.
[3] K. Diederich, J.E. Fornaess, Support functions for convex domains of finite type, Math. Z. (1999) 145–164.
[4] I. Lieb, R.M. Range, Lösungsoperatoren für den Cauchy–Riemann-Komplex mit C^k-Abschätzungen, Math. Ann. 253 (1980) 145–164.
[5] J.D. McNeal, Convex domains of finite type, J. Funct. Anal. 108 (1992) 361–373.
[6] J. Michel, $\overline{\partial}$-Problem für stückweise streng pseudokonvexe Gebiete in $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 280 (1988) 46–68.