C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 87–92

Physique mathématique/*Mathematical Physics*

Une remarque à propos des asymptotiques de Lifshitz internes

Frédéric Klopp

Département de mathématique, Institut Galilée, UMR 7539 CNRS, Université de Paris-Nord, 99 avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

Reçu le 18 avril 2002 ; accepté le 29 avril 2002

Note présentée par Jean-Michel Bony.

Résumé Le but de cette Note est de signaler l'existence d'une transition entre les régime classique et quantiques pour les estimées de Lifshitz, transition dont le paramètre est le comportement extrémal des variables aléatoires. ***Pour citer cet article : F. Klopp, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 87–92.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A remark about internal Lifshitz asymptotes

Abstract In this short Note, we show a transition between the classical and the quantum regime for Lifshitz tails. The parameter governing this transition is the decay of the distribution function of the random variables at the edges of its support. ***To cite this article: F. Klopp, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 87–92.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Consider $H_\omega = H + V_\omega$, a random operator acting on $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ where H is a $\mathbb{Z}^d$-periodic Schödinger operator and V_ω is the standard alloy type random potential, $V(x) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} \omega_\gamma V(x-\gamma)$. We assume that V is non negative and decays like $|x|^{-\nu}$ at infinity. The random variables are i.i.d., non trivial, bounded and non-negative; furthermore, we assume that their support is connected and contains 0.

Let N be the integrated density of states of H_ω. Assume that 0 is the upper edge of an open gap of the spectrum of H_ω. Hence, it also is the upper edge of an open gap of H. Let N_p be the integrated density of states of H.

We then show that

THEOREM 0.1. – *Under the assupmtions stated above, one has*

$$\liminf_{E\to 0^+} \frac{\log|\log(N(E)-N(0))|}{\log E} \geqslant -\sup\left(\frac{d}{2} - \liminf_{E\to 0^+} \frac{\log|\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leqslant E\}))|}{\log E}, \frac{d}{\nu - d}\right).$$

Assume, moreover, that $\lim_{E\to 0^+}(\log|\log(N_p(E)-N_p(0))|)/\log E = -d/2$ *then,*

$$\limsup_{E\to 0^+} \frac{\log|\log(N(E)-N(0))|}{\log E} \leqslant -\sup\left(\frac{d}{2} - \limsup_{E\to 0^+} \frac{\log|\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leqslant E\}))|}{\log E}, \frac{d}{\nu - d}\right).$$

Adresse e-mail : klopp@math.univ-paris13.fr (F. Klopp).

S1631-073X(02)02415-9/FLA

The previous result has the following immediate corollary

COROLLARY 0.1. – *In the case of Theorem* 0.1*, assume that*

$$\lim_{E\to 0^+}\frac{\log|\log \mathbb{P}(\{\omega_0\leqslant E\}))|}{\log E}=-\kappa,\quad \kappa\in[0,+\infty).$$

Then,

$$\lim_{E\to 0^+}\frac{\log|\log(N_p(E)-N_p(0))|}{\log E}=-\frac{d}{2}\quad\Longrightarrow\quad \lim_{E\to 0^+}\frac{\log(N(E)-N(0))|}{\log E}=-\sup\left(\frac{d}{2}+\kappa,\frac{d}{\nu-d}\right).$$

The previous results are completed by

THEOREM 0.2. – *Assume that* (H.1)–(H.3) *are satisfied. Assume moreover that*

$$\limsup_{E\to 0^+}\left|\frac{\log|\log \mathbb{P}(\{\omega_0\leqslant E\}))|}{\log E}\right|=\kappa,\quad \kappa\in[0,+\infty).$$

If $\frac{d}{\nu-d}>\kappa+\frac{d}{2}$*, then* $\lim_{E\to 0^+}\frac{\log(N(E)-N(0))|}{\log E}=-\frac{d}{\nu-d}$.

So we see that depending on the value of κ, the Lifshitz tails are classical (if $\kappa<\frac{d}{\nu-d}-\frac{d}{2}$) or quantum (if $\kappa>\frac{d}{\nu-d}-\frac{d}{2}$). This can be compared to the transition between the classical and the quantum regimes exhibited in [6,11].

1. Introduction

On considère un opérateur de Schrödinger aléatoire de la forme

$$H_\omega=H+V_\omega=H+\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}\omega_\gamma V_\gamma, \tag{1}$$

où

- $H=-\Delta+W$ est un opérateur opérateur de Schrödinger $\mathbb{Z}^d$-périodique, localement dans L^p où $p=2$ si $d\leqslant 3$, $p>2$ si $d=4$ et $p>d/2$ si $d\geqslant 5$ (*voir* [10,3]) ;
- $V_\gamma(\cdot)=V(\cdot-\gamma)$, $V:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ est un potentiel ;
- $(\omega_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

On notera $C(x,n)$ le cube de côté de longueur $2n+1$ centré en x i.e. $C(x,n)=\{y\in\mathbb{R}^d;\ \text{for } j=1,\dots,d,\ -n-1/2<y_j-x_j\leqslant n+1/2\}$.

Nous supposerons que V vérifie

(H.1) il existe $\nu\in(d,d+2]$ et $0\leqslant g_-\leqslant g_+$, $g_+\in\mathrm{L}^p(C(0,0))$ (ici, $p=2$ si $d\leqslant 3$, $p>2$ si $d=4$ et $p>d/2$ si $d\geqslant 5$ et $0<g_-$ sur un ouvert non vide, telles que, pour $\gamma\in\mathbb{Z}^d$ et $x\in C(0,0)$, on ait

$$g_-(x)\leqslant V(x+\gamma)\cdot\big(1+|\gamma|\big)^\nu\leqslant g_+(x). \tag{2}$$

Nous supposerons les variables aléatoires $(\omega_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}$ vérifient

(H.2) elles ne sont pas constantes ; elles sont bornées et leur support commun est l'intervalle $[0,\omega^+]$.

On remarquera que, quitte à modifier le potentiel W, si le support commun des variables aléatoires $(\omega_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}$ est un intervalle borné, on peut toujours se ramener au cas de l'hypothèse (H.2).

Sous les hypothèses (H.1), (H.2), on sait que H et H_ω sont auto-adjoints sur $\mathrm{H}^2(\mathbb{R})$, et qu'ils admettent tous deux une densité d'états intégrée (*voir* [10,3,9]). Pour H_ω, celle-ci est définie par

$$N(E)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sharp\{\text{valeurs propres de } H^D_{\omega,n}\leqslant E\}}{\mathrm{Vol}(C(0,n))},\quad E\in\mathbb{R}, \tag{3}$$

où

- $H^D_{\omega,n}$ est la restriction de Dirichlet de H_ω au cube $C(0,n)$;
- $\sharp\mathcal{E}$ est le nombre de points de l'ensemble $\mathcal{E}$ et $\mathrm{Vol}(C(0,n))$, le volume de $C(0,n)$.

ω-presque sûrement, la limite (3) existe, est croissante, continue à droite et indépendante de ω.

Pour H, on définit la densité d'états intégrée également par (3) où l'on a pris le soin de remplacer H_ω par H. On la notera N_p.

On sait que l'ensemble des points de croissance de N (resp. N_p) est le spectre presque sûr de H_ω noté Σ (resp. le spectre de H noté Σ_p). On suppose alors que le spectre de H_ω a une lacune au dessous de 0 i.e. que

(H.3) il existe $\delta > 0$ tel que $\Sigma \cap [-\delta, 0) = \emptyset$.

Sous l'hypothèse (H.2), ceci implique que le spectre de H admet également une lacune au dessous de 0 (*voir* [5]). Remarquons aussi que la valeur 0 ne joue aucun rôle particulier puisque nous pouvons toujours soustraire une constante au potentiel périodique afin de nous ramener à ce cas.

La question qui nous intéresse est le comportement asymptotique de N au voisinage de E. Cette question a été l'objet de très nombreuses études : en effet, ce comportement est déterminant dans l'analyse spectrale de l'opérateur aléatoire au voisinage de 0 (*voir* par exemple, [5,14]).

Dans [7], nous avons étudié la même question sous l'hypothèse $\lim_{E\to 0^+}(\log|\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leqslant E\}))|)/\log E = 0$. Cette Note est consacrée au cas où cette hypothèse n'est plus satisfaite.

On démontre

THÉORÈME 1.1. – *Supposons que* (H.1)–(H.3) *sont vérifiées. Alors, on a*

$$\liminf_{E\to 0^+} \frac{\log|\log(N(E)-N(0))|}{\log E} \geqslant -\sup\left(\frac{d}{2} - \liminf_{E\to 0^+}\frac{\log|\log \mathbb{P}(\{\omega_0\leqslant E\}))|}{\log E}, \frac{d}{\nu - d}\right). \tag{4}$$

Supposons, de plus, que

$$\lim_{E\to 0^+} \frac{\log|\log(N_p(E)-N_p(0))|}{\log E} = -\frac{d}{2} \tag{5}$$

alors, on a

$$\limsup_{E\to 0^+} \frac{\log|\log(N(E)-N(0))|}{\log E} \leqslant -\sup\left(\frac{d}{2} - \limsup_{E\to 0^+}\frac{\log|\log \mathbb{P}(\{\omega_0\leqslant E\}))|}{\log E}, \frac{d}{\nu - d}\right). \tag{6}$$

On sait que le comportement de N_p au voisinage de 0 est l'un des paramètres contrôlant le comportement de N (*voir* [5]). L'hypothèse (5) est toujours vérifiée en dimension 1 ; en dimension quelconque, elle est vérifiée si 0 est l'infimum du spectre de H [4]. On connaît d'autres exemples où elle est vérifiée (*voir* par exemple, [12,8] dans le cas semi-classqiue et [5]).

On notera que le comportement des distributions des variables aléatoires $(\omega_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}$ déterminent si on se trouvent dans un régime quantique ou classique i.e. si la composante énergie cinétique intervient ou non dans l'exposant de Lifshitz (au moins dans le cas longue portée). On voit que suivant la valeur de κ, les asymptotiques de Lifshitz sont classiques (si $\kappa < \frac{d}{\nu-d} - \frac{d}{2}$) ou quantiques (si $\kappa > \frac{d}{\nu-d} - \frac{d}{2}$). Ceci doit être comparé aux comportements trouvés dans [6,11].

Le Théorème 1.1 admet le corollaire immédiat suivant

COROLLAIRE 1.1. – *Supposons que* (H.1)–(H.3) *sont vérifiées. Supposons, de plus, que*

$$\lim_{E\to 0^+}\frac{\log|\log \mathbb{P}(\{\omega_0\leqslant E\}))|}{\log E} = -\kappa, \quad \kappa\in[0,+\infty).$$

Alors,

$$\lim_{E\to 0^+} \frac{\log|\log(N_p(E)-N_p(0))|}{\log E} = -\frac{d}{2} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{E\to 0^+} \frac{\log(N(E)-N(0))|}{\log E} = -\sup\left(\frac{d}{2}+\kappa, \frac{d}{\nu-d}\right).$$

On peut compléter le Théorème 1.1 par l'énoncé suivant.

THÉORÈME 1.2. – *Supposons que* (H.1)–(H.3) *sont vérifiées. Supposons, de plus, que*

$$\limsup_{E\to 0^+}\left|\frac{\log|\log \mathbb{P}(\{\omega_0\leqslant E\}))|}{\log E}\right| = \kappa, \quad \kappa\in[0,+\infty).$$

Si $\frac{d}{\nu-d} > \kappa + \frac{d}{2}$, *alors* $\lim_{E\to 0^+} \frac{\log(N(E)-N(0))|}{\log E} = -\frac{d}{\nu-d}$.

Remarquons d'abord que dans ce résultat, nous ne supposons plus que (5) est satisfaite, i.e. le résultat vaut sans hypothèses sur le comportement de N_p en bord de bande. Ce résultat étend le théorème principal de [7]. En effet, si $\kappa = 0$ et que (H.1) est vérifiée, on a toujours $\frac{d}{\nu-d} > \kappa + \frac{d}{2}$.

Pour finir, remarquons que les calculs faits ici dans le cas de bords inférieurs de bandes se transposent de façon immédiate au cas des bords supérieurs à condition de modifier l'hypothèse de signe sur V i.e. de supposer V négatif tel que $|V|$ vérifie (H.1).

2. Démonstration du Théorème 1.1

Clairement, la démonstration du Théorème 1.1 se fait en deux étapes, la preuve de (4) et celle de (6). La preuve de (4) suit celle de la minoration similaire dans [7]. La preuve de (6) est une conséquence du théorème de réduction de [5] et des techniques développées pour le cas discret dans [13].

2.1. Le preuve de (4)

Dans [7], on démontre

LEMME 2.1. – *Soit* $\alpha \in]0,1[$. *On définit la probabilité*

$$P(\varepsilon,\alpha) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega;\ \forall|\beta| \leqslant \varepsilon^{(1+\alpha)/2},\ \sum_{\gamma\in\Gamma} \omega_\gamma \big(1+|\beta-\gamma|\big)^\nu \leqslant \varepsilon^{1+\alpha}\right\}\right). \tag{7}$$

Alors, on a

$$\liminf_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{\log|\log(N(\varepsilon)-N(0))|}{\log\varepsilon} \geqslant \liminf_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{\log|\log(P(\varepsilon,\alpha))|}{\log\varepsilon}. \tag{8}$$

Démonstration. – Bien qu'il n'y soit pas énoncé, le Lemme 2.1 est bien démontré dans [7]. En effet, en combinant le Théorème 1.2 de [7] avec (2.8) et (2.9) de [7], on obtient immédiatement l'énoncé ci-dessus. □

Il reste alors à minorer $P(\varepsilon,\alpha)$. Pour cela, on constate que si, pour $|\gamma| \leqslant \varepsilon^{-(1+2\alpha)/(\nu-d)}$, on a $\omega_\gamma \leqslant \varepsilon^{1+\alpha}(1+\operatorname{dist}(\gamma, C(0,\varepsilon^{-(1-\alpha)/2}))^{(\nu-d)(1-\alpha)}$, alors, pour ε suffisamment petit, pour $|\beta| \leqslant \varepsilon^{(1+\alpha)/2}$, on a $\sum_{\gamma\in\Gamma} \omega_\gamma(1+|\beta-\gamma|)^\nu \leqslant \varepsilon^{1+\alpha}$. On en déduit immédiatement que

$$P(\varepsilon,\alpha) \geqslant \prod_{|\gamma|\leqslant\varepsilon^{-(1+2\alpha)/(\nu-d)}} \mathbb{P}\big(\omega_0 \leqslant \varepsilon^{1+\alpha}\big(1+\operatorname{dist}\big(\gamma, C\big(0,\varepsilon^{-(1-\alpha)/2}\big)\big)\big)^{(\nu-d)(1-\alpha)}\big).$$

Donc, si $\kappa = \liminf_{E\to 0^+} \frac{\log|\log\mathbb{P}(\{\omega_0\leqslant E\}))|}{\log E}$, alors, pour $\alpha > 0$ et ε suffisamment petit,

$$\begin{aligned}\log P(\varepsilon,\alpha) &\geqslant -\varepsilon^{-\kappa(1+\alpha)} \sum_{|\gamma|\leqslant\varepsilon^{-(1+2\alpha)/(\nu-d)}} \big(1+\operatorname{dist}\big(\gamma, C\big(0,\varepsilon^{-(1-\alpha)/2}\big)\big)\big)^{-\kappa(\nu-d)(1-\alpha)} \geqslant -\varepsilon^{-(\kappa+d/2)(1+\alpha)}\\ &\quad - \varepsilon^{-\kappa(1+\alpha)} \sum_{\varepsilon^{-(1-\alpha)/2}\leqslant|\gamma|\leqslant\varepsilon^{-(1+2\alpha)/(\nu-d)}} \big(1+\operatorname{dist}\big(\gamma, C\big(0,\varepsilon^{-(1-\alpha)/2}\big)\big)\big)^{-\kappa(\nu-d)(1-\alpha)}.\end{aligned} \tag{9}$$

Si $(\nu-d)\kappa > d$, on choisit α petit de façon à ce que $(1-\alpha)(\nu-d)\kappa > d$, alors, la somme ci-dessus est convergente, et on obtient

$$\liminf_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{\log|\log(P(\varepsilon,\alpha))|}{\log\varepsilon} \geqslant -(1+\alpha)\left(\kappa+\frac{d}{2}\right).$$

Si $(\nu-d)\kappa < d$, pour ε suffisamment petit, on calcule le terme principal de la seconde somme pour obtenir

$$\sum_{\varepsilon^{-(1-\alpha)/2}\leqslant|\gamma|\leqslant\varepsilon^{-(1+2\alpha)/(\nu-d)}} \big(1+\operatorname{dist}\big(\gamma, C\big(0,\varepsilon^{-(1-\alpha)/2}\big)\big)\big)^{-\kappa(\nu-d)(1-\alpha)} \leqslant C\varepsilon^{(\kappa(\nu-d)(1-\alpha)-d(1+\alpha))/(\nu-d)}.$$

Donc, l'équation (9) donne $\log P(\varepsilon,\alpha) \geqslant -C\varepsilon^{-(d(1+\alpha)-2\alpha\kappa)/(\nu-d)}$. En utilisant le Lemme 2.1 et en faisant tendre α vers 0, on obtient (4). □

2.2. Le preuve de (6)

Cette preuve repose sur le résultat suivant tiré de [5]

THÉORÈME 2.1 ([5]). – *Sous les hypothèses* (H.1)–(H.3), *si* (5) *est vérifiée alors il existe* $C > 0$ *et* $E_0 > 0$ *telles que, si* $0 \leqslant E \leqslant E_0$, *alors, la densité d'états* N *vérifie*

$$N(E) - N(0) \leqslant C N^a(C\cdot E),$$

où N^a *est la densité d'états d'un modèle d'Anderson discret i.e. un opérateur aléatoire* H^a_ω *agissant sur* $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ *définit par* $H^a_\omega = -\Delta_d + V^a_\omega$ *avec*

- $-\Delta_d$ *est le Laplacien discret usuel sur* $\mathbb{Z}^d$ *normalisé de façon à ce que sont spectre soit* $[0, 2d]$;
- V^a_ω *est la matrice diagonale infinie qui a* $v_\gamma(\omega) = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^d} \omega_\beta(1 + |\gamma-\beta|)^{-\nu}$ *pour* γ*-ième coefficient sur la diagonale.*

Démonstration. – Ce résultat est une conséquence directe du Lemme 7.1 et de la Proposition 1.1 de [5]. □

Il nous suffit maintenant de démontrer que N^a vérifie (6). Pour cela, nous utilisons les techniques développées dans [13] et [9].

A l'instar de [13] et [9], pour L, un entier positif, on définit les opérateurs H^L_0, V^L_ω, H^L_ω par

$$\big(H^L_\omega u\big)(\alpha) = \sum_{\substack{|\alpha-\beta|=1\\ \beta\in C(0,L)}} \big(u(\alpha)-u(\beta)\big), \quad \big(V^L_\omega u\big)(\alpha) = v_\alpha(\omega)u(\alpha), \quad u\in\ell^2\big(\mathbb{Z}^d\cap C(0,L)\big),$$

$$H^L_\omega = H^L_0 + V^L_\omega.$$

Pour H^L_ω, on définit la densité d'état par

$$N^a_L(E) = \mathbb{E}\left(\frac{\#\{\text{ valeurs propres de } H^L_\omega \text{ inférieures à } E\}}{(2L+1)^d}\right).$$

Alors, le Théorème 2.5 de [13] garantit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $L \geqslant 1$, on a

$$N^a(E) \leqslant N^a_L(E) \leqslant C P_L(E), \tag{10}$$

où $P_L(E) = \mathbb{P}(\{H^L_\omega$ admet au moins une valeur propre inférieure à $E\})$. Pour estimer cette probabilité, on suit la preuve du Théorème 10.1 de [9]. Soit $\delta > 0$. On définit les variables aléatoires

$$\widehat{\omega}_\gamma = \begin{cases} \omega_\gamma & \text{si } \omega_\gamma \leqslant \delta,\\ \delta & \text{si } \omega_\gamma > \delta.\end{cases}$$

Elles sont indépendantes et identiquement distribuées. On considère l'opérateur aléatoire $H^L_{\widehat{\omega}}$ définit comme H^L_ω où l'on a remplacé les $(\omega_\gamma)_\gamma$ par les $(\widehat{\omega}_\gamma)_\gamma$. Notons que le potentiel $V^L_{\widehat{\omega}}$ vérifie $\|V^L_{\widehat{\omega}}\|_\infty \leqslant C\delta$ (où $C > 0$ est une constante). De façon évidente, on obtient $N^a_L(E) \leqslant \widehat{N}^a_L(E)$ si $\widehat{N}^a_L(E)$ est la densité d'états pour $H^L_{\widehat{\omega}}$.

On choisit $\mathrm{L} = cE^{-1/2}$ et $\delta = E/c$ (où $c > 0$ est petit mais tel que δ soit également petit). Pour c et E suffisamment petits, l'équation (10.15) dans [9] devient

$$P_L(E) \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{\omega;\ \frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{|\gamma|\leqslant L} v_\gamma(\widehat{\omega}) \leqslant \frac{\delta}{K}\right\}\right), \tag{11}$$

où la constante $K > 0$ peut être rendue arbitrairement grande en diminuant c.

Estimons cette dernière probabilité. Pour cela, on fixe $0 < \alpha < 1$ et on calcule

$$\frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{|\gamma|\leqslant L} v_\gamma(\widehat{\omega}) = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^d}\widehat{\omega}_\beta\left(\frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{|\gamma|\leqslant L}\big(1+|\gamma-\beta|\big)^{-\nu}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{C(2L+1)^d}\sum_{|\beta|\leqslant L}\widehat{\omega}_\beta + \frac{1}{C}\sum_{L<|\gamma|\leqslant \delta^{-(\nu-d)(1-\alpha)}}\widehat{\omega}_\gamma\big(1+|\gamma|+L\big)^{-\nu},$$

où $C>0$ est une constante fixée.

Donc,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega;\ \frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{|\gamma|\leqslant L} v_\gamma(\widehat{\omega})\leqslant \frac{\delta}{K}\right\}\right)\leqslant \mathbb{P}_1\cdot\mathbb{P}_2, \tag{12}$$

où

$$\mathbb{P}_1=\mathbb{P}\left(\left\{\omega;\ \frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{|\gamma|\leqslant L}\widehat{\omega}_\gamma\leqslant C\frac{\delta}{K}\right\}\right),$$

$$\mathbb{P}_2=\mathbb{P}\left(\left\{\omega;\ \sum_{L<|\gamma|\leqslant \delta^{-(\nu-d)(1-\alpha)}}\widehat{\omega}_\gamma\big(1+|\gamma|+L\big)^{-\nu}\leqslant C\frac{\delta}{K}\right\}\right).$$

Ces deux dernières probabilités s'estiment par les techniques de grandes déviations classiques (*voir*, par exemple, [1,2]). Avec les choix faits ci-dessus pour L et δ, on obtient en résultat que $\mathbb{P}_1\leqslant \mathrm{e}^{-L^d|\log(\mathbb{P}(\hat{\omega}_0=0))|/C}$, $\mathbb{P}_2\leqslant \mathrm{e}^{-(|\log(\mathbb{P}(\hat{\omega}_0=0))|+\delta^{-d/(\nu-d)})/C}$. En utilisant (12), (11) et (10), on obtient que, pour E suffisamment petit, $N^a(E)\leqslant \mathrm{e}^{-(L^d|\log(\mathbb{P}(\hat{\omega}_0=0))|+|\log(\mathbb{P}(\hat{\omega}_0=0))|+\delta^{-d/(\nu-d)})/C}$. Comme $\mathrm{L}=cE^{-1/2}$ et $\delta=E/c$, ceci nous donne (6).

3. Démonstration du Théorème 1.2

La preuve de ce résultat se fait également en deux étapes. La minoration est obtenue comme dans la partie 2.1 en utilisant l'hypothèse que $\frac{d}{\nu-d}>\kappa+\frac{d}{2}$. La majoration de l'exposant est obtenue exactement comme celle dans [7].

Remerciements. Ce travail a été réalisé avec l'aide financière du Fond National pour la Science 2000 « Programme Jeunes Chercheurs ».

Références bibliographiques

[1] A. Dembo, O. Zeitouni, Large Deviation Techniques and Applications, Jones and Bartlett, Boston, 1992.
[2] J.-M. Deuschel, D. Stroock, Large Deviations, Pure Appl. Math., Vol. 137, Academic Press, 1989.
[3] W. Kirsch, Random Schrödinger operators, in: A. Jensen, H. Holden (Eds.), Schrödinger Operators, Proceedings, Sonderborg, Denmark, 1988, Lecture Notes in Phys., Vol. 345, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
[4] W. Kirsch, B. Simon, Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators, J. Funct. Anal. 75 (2) (1987) 396–410.
[5] F. Klopp, Internal Lifshits tails for random perturbations of periodic Schrödinger operators, Duke Math. J. 98 (2) (1999) 335–396.
[6] F. Klopp, Precise high energy asymptotics for the integrated density of states of an unbounded random Jacobi matrix, Rev. Math. Phys. 12 (4) (2000) 575–620.
[7] F. Klopp, Internal Lifshitz tails for Schrödinger operators with random potentials, J. Math. Phys., 2002, à paraître.
[8] A. Outassourt, Comportement semi-classique pour l'opérateur de Schrödinger à potentiel périodique, J. Funct. Anal. 72 (1987) 65–93.
[9] L. Pastur, A. Figotin, Spectra of Random and Almost-Periodic Operators, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
[10] M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol IV: Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1978.
[11] O. Saad, Comportement en grandes énergies de la densité d'états du modèle d'Anderson non borné, Ph.D. thesis, Université de Paris 13, Villetaneuse, en préparation.
[12] B. Simon, Semi-classical analysis of low lying eigenvalues III. Width of the ground state band in strongly coupled solids, Ann. Phys. 158 (1984) 415–420.
[13] B. Simon, Lifshitz tails for the Anderson model, J. Statist. Phys. 38 (1985) 65–76.
[14] P. Stollman, Caught by Disorder, Birkhäuser, 2001.