C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 751–756

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Solutions entropiques des problèmes non locaux

Kaouther Ammar

ULP, UFR de mathématiques et informatique, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France

Reçu le 4 septembre 2001 ; accepté après révision le 28 février 2002

Note présentée par Pierre-Louis Lions.

Résumé On introduit une notion de solution entropique pour le problème non local $\mathcal{C}f + f = \psi$ sur $\partial\Omega$, où $\psi \in \mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ et $\mathcal{C}$ est un opérateur capacité non linéaire, puis on prouve son existence et unicité. Cette notion de solution permet aussi de résoudre un problème elliptique général avec conditions au bord non linéaires. ***Pour citer cet article : K. Ammar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 751–756.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Entropy solutions of nonlocal problems

Abstract We introduce a notion of entropy solution for the nonlocal problem $\mathcal{C}f + f = \psi$ on $\partial\Omega$, where $\psi \in \mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ and $\mathcal{C}$ is a nonlinear capacity operator. We prove its existence and uniqueness. This notion of solution allows also to solve a general elliptic problem with nonlinear boundary conditions. ***To cite this article: K. Ammar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 751–756.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

This Note summerizes the main results we have obtained in [1]. Let Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 2)$ with a regular boundary $\partial\Omega$, and $1 < p < N$. Let $a : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ be a Caratheodory function, strictly monotone in $\xi \in \mathbb{R}^N$ and such that $u \mapsto Au = -\operatorname{div} a(\cdot, Du)$ is a bounded coercive and continuous operator from $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ into its dual. We consider the nonlocal problem

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \mathcal{C}f + f = \psi & \text{in } \partial\Omega, \\ \psi \in \mathrm{L}^1(\partial\Omega), \end{cases}$$

where $\mathcal{C}$ is the capacity operator defined on $\mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$ by: $\langle \mathcal{C}f, g\rangle = \int_\Omega a(\cdot, Du)\cdot Dv$, for $u, v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ with $v|_{\partial\Omega} = g$ and $Au = 0$, $u|_{\partial\Omega} = f$ (u is called the A-harmonic lifting of f).

We define a notion of entropy solution for problem (P) as follows:

DEFINITION. – An entropy solution of problem (P) is an element f of the space

$$\tau^{1,p}(\partial\Omega) = \left\{ f : \partial\Omega \to \mathbb{R} \text{ measurable} \mid T_k f \in \mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega),\ \forall k > 0 \right\}$$

Adresse e-mail : ammar@math.u-strasbg.fr (K. Ammar).

S1631-073X(02)02336-1/FLA

satisfying the following:

$$\left\langle \mathcal{C}\left(g + T_k(f-g)\right), T_k(f-g)\right\rangle + \int_{\partial\Omega} f T_k(f-g) \leqslant \int_{\partial\Omega} \psi T_k(f-g)$$

for all $g \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega) \cap \mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$ and all $k > 0$.

(T_k is the truncation function defined on $\mathbb{R}$ by: $T_k(r) = \inf(k, \sup(-k, r))$.)

This definition can be extended to more general completely accretive operators. It extends in some sense the classical notions of entropy and renormalised solutions introduced in [3] and [7] for the local operator A. Indeed we prove:

PROPOSITION. – *The following characterisations are equivalent*:

(1) *f is an entropy solution of* (P).

(2) $\begin{cases} f \in \tau^{1,p}(\partial\Omega), \text{ and } \lim_{m\to+\infty}\langle \mathcal{C}T_m f, \varphi(f)g\rangle + \int_{\partial\Omega} f\varphi(f)g = \int_{\partial\Omega}\psi\varphi(f)g, \\ \lim_{j\to+\infty}\sup_m \langle \mathcal{C}T_m f, T_{j+h}f - T_j f\rangle = 0 \end{cases}$

for all $g \in \mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)$, $h > 0$ and for any piecewise affine function $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which is compactly supported.

(3) $\begin{cases} f \in \tau^{1,p}(\partial\Omega), \text{ and } \forall g \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)\cap \mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega), \forall k > 0, \\ \lim_{m\to+\infty}\langle \mathcal{C}(T_m f), T_k(f-g)\rangle + \int_{\partial\Omega} f T_k(f-g) \leqslant \int_{\partial\Omega}\psi T_k(f-g). \end{cases}$

The first main result of our paper is the following:

THEOREM 1. – *Let $\psi \in \mathrm{L}^1(\partial\Omega)$. Then there exists a unique entropy solution $f \in \mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ of problem* (P).

Problem (P) formulated with the capacity operator on the variety $\partial\Omega$ is equivalent to the following problem:

$$(\mathrm{P}') \quad \begin{cases} Au = 0 \text{ on } \Omega, \\ a(\cdot, Du)\cdot\eta + u = \psi \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

formulated on Ω, with conditions on the boundary (η being the unit outward normal on $\partial\Omega$). Here we use the same notation for u and its trace on $\partial\Omega$.

In this direction, we prove that the sequence $(\tilde{u}_k)_k$ of the A-harmonic liftings of $(T_k f)_k$ satisfies: $\lim_{j\to+\infty}\sup_k \int_{\{j\leqslant|\tilde{u}_k|\leqslant j+h\}} a(\cdot, D\tilde{u}_k)\cdot D\tilde{u}_k = 0$ and converges a.e. in Ω to $\tilde{u} \in \tau^{1,p}(\Omega)\cap M^{p_1}(\Omega)$ (*see* [3]) with $p_1 = \frac{N(p-1)}{N-p}$. The function $\tilde{u}$ is a renormalised solution of problem (P′) in the following sense:

$\int_\Omega a(\cdot, D\tilde{u})\cdot D(\varphi(\tilde{u})v) + \int_{\partial\Omega} f\varphi(f)g = \int_{\partial\Omega}\psi\varphi(f)g$, for any piecewise affine function $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ which is compactly supported ($v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ being a lifting of g).

The previous result allows to solve a general nonlinear elliptic boundary value problem. Let $\phi \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, $\psi \in \mathrm{L}^1(\partial\Omega)$, γ and β two maximal monotone graphs in $\mathbb{R}^2$ with $0 \in \beta(0)$ and $0 \in \gamma(0)$. We consider the problem

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} u - \operatorname{div} a(\cdot, Du) + \beta(u) \ni \phi & \text{in } \Omega, \\ a(\cdot, Du)\cdot\eta + \gamma(u) \ni \psi & \text{in } \partial\Omega. \end{cases}$$

The particular case when $\psi \equiv 0$ and $\beta \equiv 0$ had already been studied in [2] under additional assumptions on either a or γ. Here we study the general case $\psi \in \mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ and $\beta \not\equiv 0$ without any extra conditions on a and γ. We introduce a notion of renormalised solution for problem (S) as follows:

DEFINITION. – A renormalised solution of problem (S) is a function u in $\mathrm{L}^1(\Omega) \cap \tau_{\mathrm{tr}}^{1,p}(\Omega)$ satisfying the following conditions:

(1) there exists $w \in \mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ and $z \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ such that $w(x) \in \gamma(u(x))$ a.e. in $\partial\Omega$, $z(x) \in \beta(u(x))$ a.e. on Ω, and

$$\int_\Omega a(\cdot, Du) \cdot D\big(\varphi(u)v\big) + \int_\Omega u\varphi(u)v + \int_\Omega z\varphi(u)v + \int_{\partial\Omega} w\varphi(u)g = \int_\Omega \phi\varphi(u)v + \int_{\partial\Omega} \psi\varphi(u)g,$$

for all piecewise affine function $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ compactly supported, v being a lifting of g.

(2) $\lim_{j\to+\infty} \int_{\{j \leqslant |u| \leqslant j+h\}} a(\cdot, Du) \cdot Du = 0, \ \forall h > 0.$

(*See* [2] for the definition of the space $\tau_{\mathrm{tr}}^{1,p}(\Omega)$.) We prove the following existence and uniqueness result.

THEOREM 2. – *Let* $\phi \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, $\psi \in \mathrm{L}^1(\partial\Omega)$. *Then there exists a unique renormalised solution* $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ *of problem* (S).

1. Introduction

Dans cette Note qui annonce les résultats de [1], on se propose de définir une notion de solution entropique pour un problème nonlocal.

On se donne un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 2)$, de frontière $\partial\Omega$ régulière, et $a : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction de Carathéodory vérifiant les hypothèses suivantes :

(H_1) il existe $\lambda > 0$ tel que $a(x,\xi) \cdot \xi \geqslant \lambda|\xi|^p$ p.p. tout $x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$;

(H_2) il existe $c > 0$ et $\tilde{g} \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$, tels que $|a(x,\xi)| \leqslant c(\tilde{g}(x) + |\xi|^{p-1})$ p.p. tout $x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^N$;

(H_3) $(a(x,\xi) - a(x,\eta)) \cdot (\xi - \eta) > 0$ p.p. tout $x \in \Omega, \forall \xi \neq \eta \in \mathbb{R}^N$.

Dans les dernières années plusieurs auteurs se sont intéressés aux problèmes elliptiques locaux dans L^1 relatifs aux opérateurs sous forme divergentielle du type : (I) : $Au = -\operatorname{div} a(\cdot, Du) = f$ dans Ω, $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Pour $f \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$, on a l'existence et l'unicité d'une solution variationnelle dans $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ (*voir* [6]). En dehors du cadre variationnel et pour f seulement intégrable, on perd l'existence d'une solution $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ et on n'a même pas existence en général d'une solution au sens des distributions dans $\mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega)$. De plus, même si une telle solution existe, on n'a pas unicité en général (*voir* [3]). Pour y remédier, on a du introduire les nouvelles notions équivalentes de solution entropique, renormalisée et SOLA (*cf.* [3,7,4] et [5]). Ces nouvelles notions sont aussi des solutions au sens des distributions et assurent l'unicité dans le cas $p > 2 - 1/N$. Dans le cas $1 < p \leqslant 2 - 1/N$, elles permettent de définir l'opérateur A et assurent l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème (I).

Dans le présent travail, on s'intéresse au problème

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} \mathcal{C}f + f = \psi & \text{in } \partial\Omega, \\ \psi \in \mathrm{L}^1(\partial\Omega), \end{cases}$$

où $\mathcal{C}$ est l'opérateur capacité défini de $\mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$ sur son dual $\mathrm{W}^{-1/p',p'}(\partial\Omega)$ par : $\langle \mathcal{C}f, g\rangle = \int_\Omega \langle a(\cdot, Du), Dv\rangle$, $f, g \in \mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$, où $u, v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$, $v|_{\partial\Omega} = g$ et $-\operatorname{div} a(\cdot, Du) = 0$, $u|_{\partial\Omega} = f$. On introduit une notion de solution (entropique) pour ce problème et on prouve son existence et unicité. Cette notion permettra de résoudre par la suite le problème

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} u - \operatorname{div} a(\cdot, Du) + \beta(u) \ni \phi & \text{in } \Omega, \\ a(\cdot, Du) \cdot \eta + \gamma(u) \ni \psi & \text{in } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\phi \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, $\psi \in \mathrm{L}^1(\partial\Omega)$, γ et β sont deux graphes maximaux monotones dans $\mathbb{R}^2$ avec $0 \in \beta(0)$ et $0 \in \gamma(0)$. Ici on utilise la même notation pour u et sa trace sur $\partial\Omega$.

2. Définitions et résultats préliminaires

On note de manière analogue à [3], $\tau^{1,p}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable $|$ $T_k u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega),\ \forall k > 0\}$ et on définit l'espace $\tau^{1,p}(\partial\Omega) = \{f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ mesurable $|$ $T_k f \in \mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega),\ \forall k > 0\}$.

DÉFINITION 2.1. – Une solution entropique du problème (P) est une fonction $f \in \tau^{1,p}(\partial\Omega)$ vérifiant : $\langle \mathcal{C}(g+T_k(f-g)), T_k(f-g)\rangle + \int_{\partial\Omega} f T_k(f-g) \leqslant \int_{\partial\Omega} \psi T_k(f-g)$, pour tout $g \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega) \cap \mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$, pour tout $k > 0$.

Cette définition peut être adaptée à des opérateurs accrétifs plus généraux et étend dans un certain sens les notions de solution entropique et renormalisée introduites dans [3] et [7] pour l'opérateur local A. En effet, on montre que :

PROPOSITION 2.1. – *Les trois propositions suivantes sont équivalentes* :

(1) f *est solution entropique du problème* (P).

(2) $$\begin{cases} f \in \tau^{1,p}(\partial\Omega),\ \textit{et}\ \lim_{m\to+\infty} \langle \mathcal{C}T_m f, \varphi(f) g\rangle + \int_{\partial\Omega} f\varphi(f) g = \int_{\partial\Omega} \psi\varphi(f) g, \\ \lim_{j\to+\infty} \sup_m \langle \mathcal{C}T_m f, T_{j+h} f - T_j f\rangle = 0 \end{cases}$$

pour tout $g \in \mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)$, $h > 0$ *et pour toute fonction affine* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *à support compact.*

(3) $$\begin{cases} f \in \tau^{1,p}(\partial\Omega),\ \textit{et}\ \forall g \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega) \cap \mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega),\ \forall k > 0, \\ \lim_{m\to+\infty} \langle \mathcal{C}(T_m f), T_k(f-g)\rangle + \int_{\partial\Omega} f T_k(f-g) \leqslant \int_{\partial\Omega} \psi T_k(f-g). \end{cases}$$

La définition de solution entropique a été induite par le résultat suivant :

PROPOSITION 2.2. – *Soient* $f, g \in \mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$. *Alors pour tout* $k > 0$,
$$\big\langle \mathcal{C}f - \mathcal{C}\big(g + T_k(f-g)\big), T_k(f-g)\big\rangle \geqslant 0.$$

On montre l'existence d'une solution entropique par approximation :
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur B_n par :
$$B_n(f) = \mathcal{C}f + T_n(f) + \frac{1}{n}|f|^{p-2} f, \quad f \in \mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega).$$
B_n étant monotone, coercif, hémicontinu et borné, pour tout $\psi \in \mathrm{W}^{-1/p',p'}(\partial\Omega)$, il existe une solution variationnelle $f \in \mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$ de l'équation $B_n f = \psi$. Soit $\psi \in \mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ et $(\psi_n)_n \subset \mathrm{W}^{-1/p',p'} \cap \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)$ une suite convergente vers ψ dans $\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$, et telle que $\|\psi_n\|_{\mathrm{L}^1(\partial\Omega)} \leqslant \|\psi\|_{\mathrm{L}^1(\partial\Omega)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note par f_n la solution variationnelle vérifiant $B_n f_n = \psi_n$. On a alors pour tout $g \in \mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$:
$$\int_\Omega a(\cdot, Du_n)\cdot Dv = \int_{\partial\Omega} \big(\psi - T_n(f_n)\big) g - \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega} |f_n|^{p-2} f_n g,$$
où $u_n, v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$, $g = v|_{\partial\Omega}$ et $-\operatorname{div} a(\cdot, Du_n) = 0$, $u_n = f_n$ sur $\partial\Omega$.

Afin de montrer l'équivalence entre les trois caractérisations d'une solution entropique du problème (P) énoncées ci-dessus et pour prouver le résultat d'existence et d'unicité, on a besoin des résultats préliminaires qu'on énonce dans les lemmes ci-dessous.

LEMME 2.1. – *La suite* $(u_n)_n$ *converge* $p.p.$ *sur* Ω *vers* $u \in \tau^{1,p}(\Omega) \cap M^{p_1}(\Omega)$, *où* $p_1 = \frac{N(p-1)}{N-p}$. *De plus* $(Du_n)_n$ *est de Cauchy pour la convergence en mesure dans* Ω.

LEMME 2.2. – *Pour tout* $k > 0$, *la suite* $(DT_k u_n)_n$ *converge dans* $\mathrm{L}^p(\Omega)^N$ *vers* $DT_k u$.

LEMME 2.3. – *La suite* $(f_n)_n$ *est uniformément bornée dans* $\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ *et dans* $M^{p-1}(\partial\Omega)$.

LEMME 2.4. – *Pour tout* $k>0$, *la suite* $(u_k^n)_n$ *des relèvements A-harmoniques des* $T_k f_n$ *converge dans* $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ *vers* $\tilde{u}_k$, *où* $\tilde{u}_k$ *est le relèvement A-harmonique de* $T_k f$.

LEMME 2.5. – *Il existe une fonction* $\tilde{u}\in\tau^{1,p}(\Omega)\cap M^{p_1}(\Omega)$ *et une sous-suite de* $(\tilde{u}_k)_k$ *qui converge p.p. sur* Ω *vers* $\tilde{u}$. *De plus la suite* $(D\tilde{u}_k)_k$ *converge en mesure vers* $D\tilde{u}$.

3. Résultats principaux

THÉORÈME 3.1. – *Pour tout* $\psi\in\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$, *il existe une unique solution entropique* f *de* (P).

Remarquons que le problème (P) formulé sur la variété $\partial\Omega$ à l'aide de l'opérateur $\mathcal{C}$ est équivalent au problème :

$$(\mathrm{P}')\quad \begin{cases} Au=0 & \text{dans } \Omega,\\ a(\cdot,Du)\cdot\eta+u=\psi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

formulé sur Ω, avec conditions au bord. La fonction $\tilde{u}$ définie au Lemme 2.5 est alors l'unique solution entropique du problème (P′) au sens suivant :

$$\begin{cases} \int_\Omega a(\cdot,D\tilde{u})\cdot D(\varphi(\tilde{u})v)+\int_{\partial\Omega} f\varphi(f)g=\int_{\partial\Omega}\psi\varphi(f)g,\\ \lim_{j\to+\infty}\int_{\{j\leqslant|\tilde{u}|\leqslant j+h\}} a(\cdot,D\tilde{u})\cdot D\tilde{u}=0 \end{cases}$$

pour tout $g\in\mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)\cap\mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)$, $h>0$, et pour toute fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ affine par morceaux et à support compact.

Les résultats présentés précédemment ont une interprétation en termes d'opérateurs accrétifs. En effet soit $\mathcal{C}_0$ l'opérateur défini dans $\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ par : $(f,\psi)\in\mathcal{C}_0$ si $f\in\mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)\cap\mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$, $\psi\in\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$, $\int_{\partial\Omega}\psi=0$ et $\langle\mathcal{C}f,T_k(f-g)\rangle\leqslant\int_{\partial\Omega}\psi T_k(f-g)$ pour tout $g\in\mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)\cap\mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$. On a

PROPOSITION 3.1. – $\mathcal{C}_0$ *est complètement accrétif dans* $\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ *et* $\mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)\subset R(I+\mathcal{C}_0)$.

Grace à la théorie générale des opérateurs accrétifs, la fermeture $\overline{\mathcal{C}_0}^{\mathrm{L}^1(\partial\Omega)}$ de l'opérateur $\mathcal{C}_0$ dans $\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ est un opérateur m-complètement accrétif dans $\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$. Le théorème suivant permet de caractériser $\overline{\mathcal{C}_0}^{\mathrm{L}^1(\partial\Omega)}$.

THÉORÈME 3.2. – *L'opérateur* $\mathcal{C}_1$ *défini dans* $\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ *par :* $(f,\psi)\in\mathcal{C}_1$ *si* $f\in\mathrm{L}^1(\partial\Omega)\cap\tau^{1,p}(\partial\Omega)$, $\psi\in\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ *avec* $\int_{\partial\Omega}\psi=0$ *et pour tout* $k>0$, *pour tout* $g\in\mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)\cap\mathrm{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$,

$$\lim_{m\to+\infty}\big\langle\mathcal{C}(T_m f),T_k(f-g)\big\rangle\leqslant\int_{\partial\Omega}\psi T_k(f-g),$$

est m*-complètement accrétif dans* $\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ *et* $\overline{\mathcal{C}_0}^{\mathrm{L}^1(\partial\Omega)}=\mathcal{C}_1$.

La notion de solution entropique introduite pour l'opérateur capacité permet de résoudre le problème d'existence et d'unicité d'une solution pour le problème :

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} -\operatorname{div}a(\cdot,Du)+\beta(u)+u\ni\phi & \text{dans } \Omega,\\ a(\cdot,Du)\cdot\eta+\gamma(u)\ni\psi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où ϕ et ψ sont dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$ et $\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ respectivement, β et γ sont deux graphes maximaux monotones dans $\mathbb{R}^2$, tels que $0\in\beta(0)$ et $0\in\gamma(0)$. Le cas particulier où $\psi=0$ et $\beta\equiv 0$ a été étudié dans [2] avec des conditions supplémentaires sur a ou γ. On considère ici le cas général où $\psi\in\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ et $\beta\not\equiv 0$, sans hypothèses supplémentaires sur a et γ. On introduit une notion de solution renormalisée pour le problème (S) comme suit.

DÉFINITION 3.1. – Une solution renormalisée du problème (S) est une fonction u dans $\mathrm{L}^1(\Omega)\cap\tau_{\mathrm{tr}}^{1,p}(\Omega)$ (*voir* [2]) vérifiant les conditions suivantes :

(1) Il existe $w\in\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ et $z\in\mathrm{L}^1(\Omega)$ tels que $w(x)\in\gamma(u(x))$ p.p. sur $\partial\Omega$, $z(x)\in\beta(u(x))$ p.p. sur Ω, et

$$\int_\Omega a(\cdot,Du)\cdot D\bigl(\varphi(u)v\bigr)+\int_\Omega u\varphi(u)v+\int_\Omega z\varphi(u)v+\int_{\partial\Omega} w\varphi(u)g=\int_\Omega \phi\varphi(u)v+\int_{\partial\Omega}\psi\varphi(u)g,$$

pour toute fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ affine et à support compact.

(2) $\lim\limits_{j\to+\infty}\int_{\{j\leqslant|u|\leqslant j+h\}} a(\cdot,Du)\cdot Du=0\quad\forall h>0.$

On montre le résultat d'existence et d'unicité suivant :

THÉORÈME 3.3. – *Soit* $\phi\in\mathrm{L}^1(\Omega)$, $\psi\in\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$. *Alors il existe une unique solution renormalisée* $u\in\mathrm{L}^1(\Omega)$ *du problème* (S).

Références bibliographiques

[1] K. Ammar, Solutions entropiques des opérateurs non locaux (en préparation).

[2] F. Andreu, J.M. Mazon, S. Segura de Leon, J. Toledo, Quasilinear elliptic and parabolic equations in L^1 with nonlinear boundary conditions, Adv. Math. Sci. Appl. 7 (1997) 183–213.

[3] Ph. Bénilan, L. Boccardo, Th. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.L. Vazquez, An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1995) 241–273.

[4] A. Dall'Aglio, Approximated solutions of equations with L^1-data. Application to the H-convergence of quasi-linear equations, Ann. Mat. Pura Appl. (4) CLXX (1996) 207–240.

[5] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet, Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 28 (1999) 741–808.

[6] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, 1969.

[7] F. Murat, Soluciones renormalizadas de EDP elipticas non lineales, Cours à l'université de Séville, Publication R93023, Laboratoire d'analyse numérique, Paris VI, 1993.