

# Construction d'un modèle M1-multigroupe pour les équations du transfert radiatif

Rodolphe Turpault

MAB, UMR CNRS 5466, LRC-CEA M03, Université de Bordeaux I, 33400 Talence, France

Reçu le 26 octobre 2001 ; accepté après révision le 8 janvier 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

---

## Résumé

Certaines applications en transfert radiatif nécessitent la prise en compte d'un déséquilibre fréquentiel sans pour autant requérir la grande précision d'une méthode cinétique. Le modèle aux moments présenté a pour objectif d'étendre les possibilités du modèle M1 proposé par B. Dubroca et J.L. Feugeas [2] pour pouvoir résoudre de telles applications, tout en restant hyperbolique et physiquement consistant. *Pour citer cet article : R. Turpault, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 331–336.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Construction of a multigroup M1 model for the radiative transfer equations

## Abstract

Though not requiring the great accuracy of a kinetic method, several applications of radiative transfer need to take into account quantities which are not constant over all the frequencies. We introduce a moments model which aims at extending the possibilities of the M1 model proposed by B. Dubroca and J.L. Feugeas [2] in order to solve such applications and keeps the hyperbolicity and physical consistency. *To cite this article: R. Turpault, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 331–336.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## Abridged English version

The radiative transfer equations can be solved using a wide range of different methods depending on which level of information is expected. Sometimes, for example in problems coupled with other physical phenomena, it is not mandatory to consider microscopic quantities. In such cases, the grey-M1 model [2] may be useful since it allows us to consider a great range of applications. However, it does not take into account frequency dependencies. The model which is introduced in this article extends the M1-model to be frequency dependant while keeping the most important properties of the grey model.

Let us consider the system (4), (5). This intermediate system can be obtained by multiplying a simplified radiative transfer equation by  $\mathbf{m} = (1, \Omega)^T$  and integrating the result over the directions of propagation  $\Omega$ .<sup>1</sup> The radiative energy  $E$  and the radiative flux vector  $F$  are the first two angular moments of the radiative

---

*Adresse e-mail :* turpault@math.u-bordeaux.fr (R. Turpault).

intensity  $I$ .  $\sigma^a$  and  $\sigma^d$  are respectively the absorption and scattering opacities, which usually strongly depend on the frequency.

If we choose to close this system with a minimum entropy principle, the closure function is given by  $\mathcal{I}(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} [\exp(\frac{h\nu}{k} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\nu)) - 1]^{-1}$ , where  $\boldsymbol{\alpha}(\nu)$  is Lagrange's coefficient. Then, we have the following properties:

**THEOREM 1.** – *The intermediate model, closed thanks to the minimum entropy principle and coupled with the material equation (2) is a hyperbolic system which locally decreases the total entropy and conserves the energy. Moreover, if  $(E(\nu), F(\nu))$  is physically relevant, then  $\boldsymbol{\alpha}(\nu)$  exists and is unique.*

Though the intermediate model is satisfying in terms of properties, it is not computable due to the frequency continuity. Hence we consider a model integrated over several groups of frequency. To do so, we consider  $\{\nu_{m-1/2}\}_{m=1, M+1}$  such as  $\nu_{1/2} = 0$  and  $\nu_{M+1/2} = +\infty$  and we integrate the intermediate system from  $\nu_{m-1/2}$  to  $\nu_{m+1/2}$ . Adding a material equation we get<sup>2</sup> the system (9)–(11).

We introduce  $\langle \cdot \rangle_m = \frac{1}{c} \int_{S^2} \int_{\nu_{m-1/2}}^{\nu_{m+1/2}} \cdot \nu \, d\Omega$ . Then, we have  $a\theta_m^4 = \langle B(T) \rangle_m$ .  $E_m$ ,  $F_m$  and  $P_m$  are the radiative energy, the radiative flux vector and the radiative pressure tensor. This system is not closed yet. Once again, we choose to close it by using the minimum entropy principle.

**THEOREM 2.** – *The distribution  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\Omega, \nu) = \sum_m 1_{[\nu_{m-1/2}; \nu_{m+1/2}] \frac{2h\nu^3}{c^2} [\exp(\frac{h\nu}{k} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}_m) - 1]^{-1}$  realizes the minimum of the radiative entropy under the condition to adequately reconstruct the moments of the considered model. Furthermore, if  $(E_m, F_m)$  are physically relevant, then  $\boldsymbol{\alpha}_m$  exist and are unique and independent from one another.*

The choice of closure implies several interesting properties. The closure function is isotropic in directions which are orthogonal to the radiative flux. It is also possible to write the Eddington tensor  $D_m = P_m/E_m$  as a simple function of the Eddington factor  $\chi_m$ :  $D_m = (1 - \chi_m)/2I_d + (3\chi_m - 1)/2\mathbf{f}_m \otimes \mathbf{f}_m$ , where  $\mathbf{f}_m = F_m/\|F_m\|$  and  $\chi_m$  is the eigenvalue of  $D_m$  associated with  $\mathbf{f}_m$ . Finally, we are able to know  $P_m$  as a function of  $E_m$  and  $F_m$ -as opposed to the grey case, this function is usually not analytical since it depends on  $\Xi(\eta) = \int_0^\eta \xi^3 [\exp(\xi) - 1]^{-1} d\xi$  which is only analytical for  $\eta = 0$  or  $\eta = +\infty$ , hence in most of the cases, it has to be computed. We also have:

**THEOREM 3.** – *The multigroup MI model has the following properties:*

1. *The system is hyperbolic.*
2. *The norm of the eigenvalues of the system is smaller than  $c$ .*
3. *The system has a total entropy which is locally dissipated.*
4. *The total energy of the system (radiative + matter) is conserved.*

These properties are very useful to compute the model. The first one allows us to work with classical schemes used to solve hyperbolic problems, even at the boundaries. The last two show that the system has a realistic physical behaviour. An example of numerical result can be viewed in Section 4. It shows the interest of taking into account frequency dependencies.

## 1. Introduction

La résolution des équations du transfert radiatif peut se faire au travers de plusieurs approches très diversifiées selon les niveaux d'informations et de précision requis. Dans certains cas, il est nécessaire de connaître finement certaines grandeurs fréquentielles ou directionnelles. Il faut alors utiliser des méthodes particulières telles que les méthodes cinétiques (voir par exemple [1]) ou les méthodes statistiques (type Monte Carlo). Parfois, la connaissance de certaines grandeurs macroscopiques est suffisante. C'est le plus souvent le cas par exemple, lorsqu'on souhaite coupler le transfert radiatif avec d'autres phénomènes

physiques (hydrodynamique, réactions chimiques, ...). Dans ce cas, le modèle M1-gris [2] permet de résoudre un large panel d'applications physiques, notamment des cas de forte anisotropie directionnelle. Cependant, ce modèle ne permet de prendre en compte aucun déséquilibre fréquentiel. L'objectif de ce document est d'introduire une extension de ce modèle capable de traiter ces déséquilibres fréquents tout en conservant les propriétés fondamentales qui font l'intérêt du modèle M1-gris.

## 2. Modèle aux moments multigroupe, fermeture M1

L'équation du transfert radiatif décrit les états de l'intensité radiative  $I$ , grandeur microscopique directement liée à la fonction de distribution des photons. Pour notre étude mathématique, nous considérons une version simplifiée. En effet, on considère des régimes qui ne sont pas en fort déséquilibre, dans des milieux d'indice optique égal à 1 où les termes de dispersion ne modifient que la direction de propagation. On couple avec avec une équation d'énergie matière également très simplifiée, destinée à être remplacée, par exemple par les équations de l'hydrodynamique. Le système s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{1}{c} \partial_t I_\nu(\Omega) + \Omega \cdot \nabla_x I_\nu(\Omega) = \sigma^a(\nu) (B_\nu(T) - I_\nu(\Omega)) - \sigma^d I_\nu(\Omega) + \frac{\sigma^d}{4\pi} \int_0^{4\pi} p_\nu(\Omega' \cdot \Omega) I_\nu(\Omega') d\Omega', \quad (1)$$

$$\rho C_\nu \partial_t T = - \iint \sigma^a(\nu) (B_\nu(T) - I_\nu) d\nu d\Omega. \quad (2)$$

$I$  est l'intensité radiative,  $T$  la température de la matière,  $\sigma(x, t, \nu)$  les opacités du milieu<sup>3</sup> ( $\sigma^a$  est l'opacité d'absorption et l'opacité de dispersion – ou « scattering »),  $\Omega$  la direction de propagation des photons,  $p_\nu(\Omega' \cdot \Omega)$  la fonction de redistribution angulaire de la dispersion, et  $B_\nu(T)$  la fonction de Planck, qui réalise le minimum de l'entropie radiative et est définie par :<sup>4</sup>

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}. \quad (3)$$

Afin de construire un modèle aux moments, la première étape consiste à multiplier ce système par  $\mathbf{m} = (1, \Omega)^T$  puis à l'intégrer en direction pour obtenir le modèle intermédiaire :

$$\partial_t E(\nu) + \nabla_x \cdot F(\nu) = c\sigma^a(\nu) (4\pi B(T, \nu) - E(\nu)), \quad (4)$$

$$\partial_t F(\nu) + c^2 \nabla_x \cdot P(\nu) = -(\sigma^a + (1 - \mathbf{g})\sigma^d) F(\nu), \quad (5)$$

$$\rho C_\nu \partial_t T = - \int c(\nu) (4\pi B(T, \nu) - E(\nu)) d\nu. \quad (6)$$

Enfin, l'entropie radiative de ce modèle intermédiaire est :

$$\mathfrak{h}(I) = \frac{2k\nu^2}{c^3} [n_I \ln n_I - (n_I + 1) \ln(n_I + 1)], \quad (7)$$

où  $n_I$  est le nombre d'occupation défini par  $n_I = c^2 I / 2h\nu^3$ .

Ce modèle intermédiaire peut être fermé en utilisant le principe d'entropie minimum. Cette technique a été introduite par D. Levermore dans le cadre de la mécanique des fluides [5]. On choisit donc une intensité radiative sous-jacente qui vérifie :

$$H(\mathcal{I}) = \min_I \left\{ H(I) = \frac{1}{c} \iint \mathfrak{h}(I) d\nu d\Omega, \forall \nu, \frac{1}{c} \int I d\Omega = E(\nu) \text{ et } \int \Omega I d\Omega = F(\nu) \right\}. \quad (8)$$

Grâce au théorème de Lagrange, on peut alors déterminer la forme de la fermeture :  $\mathcal{I}(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} [\exp(\frac{h\nu}{k} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\nu)) - 1]^{-1}$  où  $\boldsymbol{\alpha}(\nu)$  est le multiplicateur de Lagrange. Le choix de cette intensité radiative sous-jacente permet d'exprimer la pression radiative comme une fonction de  $E(\nu)$  et de  $F(\nu)$  et ainsi de fermer le système.

PROPRIÉTÉS 2.1. – *Le modèle intermédiaire fermé grâce au principe d'entropie minimum est un système hyperbolique symétrisable qui dissipe localement l'entropie totale et conserve l'énergie. De plus,  $\alpha(v)$  existe et est unique dès lors que  $(E(v), F(v))$  est physiquement admissible.*

Pour des raisons d'implémentation, on choisit d'utiliser un modèle multigroupe plutôt que le modèle continu (4), (5). Pour ce faire, on va considérer un nombre fini de groupes de fréquences. On choisit  $\{\nu_{m-1/2}\}_{m=1, M+1}$  tel que  $\nu_{1/2} = 0$  et  $\nu_{M+1/2} = +\infty$  et on intègre en fréquence de  $\nu_{m-1/2}$  à  $\nu_{m+1/2}$  pour obtenir le système multigroupe :<sup>5</sup>

$$\forall m, \quad \partial_t E_m + \nabla_x \cdot F_m = c\sigma_m^a [a\theta_m^4 - E_m], \tag{9}$$

$$\forall m, \quad \partial_t F_m + c^2 \nabla_x \cdot P_m = (-\sigma_m^a - \sigma_m^d (1 - \mathfrak{g}_m)) F_m, \tag{10}$$

$$\rho C_v \partial_t T = - \sum_m c\sigma_m^a [a\theta_m^4 - E_m]. \tag{11}$$

Si l'on choisit de noter  $\langle \cdot \rangle_m = \frac{1}{c} \int_{S^2} \int_{\nu_{m-1/2}}^{\nu_{m+1/2}} \cdot \, d\nu \, d\Omega$ , alors  $a\theta_m^4 = \langle B(T) \rangle_m$  (par analogie au cas gris où  $\langle B(T) \rangle = aT^4$ ,  $a = 8\pi^5 k^4 / 15h^3 c^3$ ).  $E_m, F_m$  et  $P_m$  sont respectivement l'énergie radiative ( $E_m = \langle I \rangle_m$ ), le vecteur flux radiatif ( $F_m = \langle c\Omega I \rangle_m$ ) et le tenseur de pression radiative ( $P_m = \langle \Omega \otimes \Omega I \rangle_m$ ). On a également  $\mathfrak{g}_m = c \langle \Omega' \cdot \Omega p(\Omega' \cdot \Omega) \rangle_m / 4\pi$  :  $c$ 'est le premier moment de la fonction de redistribution angulaire de la dispersion.

Le système ainsi obtenu n'est pas fermé. Pour ce faire, on choisit là encore une forme particulière de l'intensité radiative, notée  $\mathcal{I}$ , grâce au principe d'entropie minimum, de manière similaire à ce que l'on a fait pour le modèle intermédiaire.

PROPOSITION 2.2. – *Propriétés de la fermeture :*

- (1) *La distribution  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\Omega, \nu) = \sum_m 1_{[\nu_{m-1/2}, \nu_{m+1/2}]} \frac{2h\nu^3}{c^2} [\exp(\frac{h\nu}{k} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}_m) - 1]^{-1}$  réalise le minimum de l'entropie radiative sous la contrainte d'une bonne reconstruction des moments du modèle considéré.*
- (2) *Si les couples  $(E_m, F_m)$  sont physiquement réalisables,  $\boldsymbol{\alpha}$  existe et est unique. De plus, les  $\boldsymbol{\alpha}_m$  sont indépendants les uns des autres.*
- (3) *Tout couple de moments  $(E_m, F_m)$  physiquement réalisable à partir d'une intensité radiative positive est également réalisable par une intensité radiative de la forme choisie pour la fermeture MI-multi-groupe.*
- (4) *La pression radiative par groupe  $P_m$  peut s'exprimer en fonction de  $E_m$  et de  $F_m$ .*

PROPRIÉTÉS 2.3. – *La fermeture choisie permet en outre d'avoir les propriétés suivantes :*

- (1) *Le flux radiatif est colinéaire à  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$  défini par  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^0, \tilde{\boldsymbol{\alpha}})$ .*
- (2) *Le flux radiatif est un vecteur propre du tenseur de pression radiative.*
- (3) *Le tenseur d'Eddington  $D_m = P_m/E_m$  s'écrit simplement en fonction du facteur d'Eddington  $\chi_m$  :*

$$D_m = (1 - \chi_m)/2I_d + (3\chi_m - 1)/2\mathfrak{f}_m \otimes \mathfrak{f}_m \tag{12}$$

avec :  $\mathfrak{f}_m = F_m/\|F_m\|$  et  $\chi_m$  la valeur propre de  $D_m$  associée à  $\mathfrak{f}_m$ .

Les propriétés (1) et (2) permettent de conclure que toute l'anisotropie est traitée dans la direction du flux radiatif. En particulier, la fermeture est isotrope dans les directions orthogonales au flux radiatif. En pratique, ceci permet de traiter de grands déséquilibres (anisotropie proche de 1 en norme). En revanche, le modèle ne se comporte pas très bien en présence de plusieurs directions principales de propagation, par exemple si l'on cherche à étudier le cas de deux rayons parallèles de sens opposé.

*Remarque.* – A l'inverse du cas gris, l'expression de  $P_m$  en fonction de  $E_m$  et de  $F_m$  n'est pas analytique en général. Elle dépend en effet de la fonction  $\Xi(\eta) = \int_0^\eta \xi^3 [\exp(\xi) - 1]^{-1} d\xi$ . Or, cette dernière ne se calcule analytiquement qu'en 0 et en  $+\infty$ . On doit donc la calculer numériquement pour toutes les autres valeurs de  $\eta$ .

*Remarque.* – Le facteur d’Eddington donné par (3) a déjà été proposé dans la littérature, pour le cas gris ( $M = 1$ ), éventuellement dans des contextes différents [4,2].

### 3. Système aux moments multigroupe

On considère désormais le système aux moments multigroupe fermé par le choix d’une intensité radiative de la forme donnée par la proposition (2), ce qui revient à considérer que la pression radiative par groupe s’exprime sous la forme  $P_m = D_m E_m$  avec  $D_m$  donné par (12). On a alors :

THÉORÈME 3.1. – *Le système aux moments possède les propriétés suivantes :*

- (1) *Le système (9)–(12) est hyperbolique symétrisable.*
- (2) *Les valeurs propres du système (9)–(12) sont toutes de module inférieur à  $c$ .*
- (3) *Le système (9)–(12) admet une entropie totale qui est localement dissipée :*

$$\partial_t (\langle h \rangle / c + \rho C_v (-\ln(T)) / c^2) + \nabla_x \cdot \langle \Omega h \rangle \leq 0. \quad (13)$$

- (4) *Le système (9)–(12) assure la conservation de l’énergie totale (radiative+matière) :*<sup>6</sup>

$$\partial_t (E + c \cdot \varepsilon) + \nabla \cdot F = 0.$$

Ces propriétés sont très importantes dans l’optique d’une implémentation. La première nous permet de travailler avec des schémas classiquement utilisés pour résoudre les problèmes hyperboliques, y compris aux limites du domaine. Dans cette optique, encadrer les valeurs propres peut être primordial.

Les deux dernières propriétés montrent que le système étudié à un comportement physique réaliste, et assurent ainsi la robustesse du modèle.

Avec un groupe ( $\nu_{-1/2} = 0$  et  $\nu_{1/2} = +\infty$ ), on retrouve exactement le modèle M1 classique.

### 4. Approximation numérique

Le modèle M1-multigroupe est implémenté numériquement en utilisant un schéma HLLE explicite :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}^n - \mathcal{F}_{i-1/2}^n}{\Delta x} = \mathcal{C}(U_i^n), \quad (14)$$

avec  $U = (E_m, F_m)^T$ ,  $\mathcal{F} = (F_m, c^2 P_m)^T$ ,  $\mathcal{C} = (c\sigma_m^a (a\theta_m^4 - E_m), -c(\sigma^a + (1 - g_m)\sigma_m^d) F_m)^T$  et le flux numérique :

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^n = (b^+ \mathcal{F}_i^n - b^- \mathcal{F}_{i+1}^n) / (b^+ - b^-) + b^+ b^- (U_{i+1}^n - U_i^n) / (b^+ - b^-), \quad (15)$$

où les coefficients  $b^+$  et  $b^-$  doivent définir un intervalle contenant les valeurs propres du système. Le schéma numérique ainsi obtenu est positif, entropique et assure la limitation du flux ( $(F_m)_i^n \leq c(E_m)_i^n \forall m, i, n$ ) sous la condition CFL :  $c\Delta t / \Delta x + c\Delta t (\sigma_m^a + (1 - g)\sigma^d) \leq 1$ .

La Fig. 1 est un exemple d’utilisation : on fait pénétrer une onde chaude dans un milieu initialement froid. Les opacités varient selon la fréquence. On choisit un matériau qui est quasi-transparent dans le visible ( $\sigma^a = 10^{-3}$ ) et assez opaque ailleurs ( $\sigma_a = 4$  dans l’infra-rouge et 3, 2 dans l’ultra-violet). On néglige la dispersion dans tous les groupes ( $\sigma^d = 0$ ). Les courbes du graphe ci-dessous sont les résultats des modèles M1 gris, M1-multigroupe et d’un modèle discret de l’équation du transfert radiatif [8] pour plusieurs temps et à l’ordre 2.

On note une grande différence entre les deux modèles M1, du point de vue de la chronométrie : le modèle gris surestime les températures à l’avant du front. En effet, il ne peut prendre en compte qu’une opacité moyenne qui a pour conséquence de sous-estimer les effets des zones infra-rouges et ultra-violettes et de largement surestimer les effets de la zone visible. Le modèle multigroupe quant à lui donne un résultat très proche de celui obtenu à partir du modèle cinétique (nécessitant 60 intervalles de fréquence au lieu de 3). En revanche, les modèles M1 sont tous les deux imprécis en amont du front.

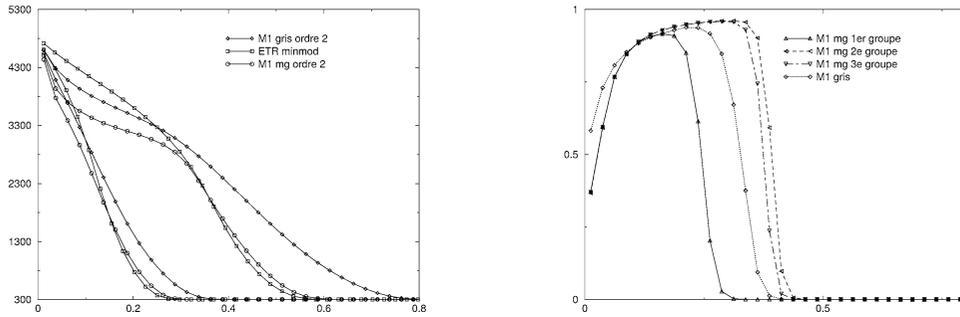


Figure 1. – (a) Température radiative des trois modèles en régime instationnaire pour 2 temps différents. (b) Facteurs d’anisotropie du modèle gris et dans chaque groupe du modèle multigroupe au premier temps.

Figure 1. – (a) Radiative temperature of the 3 models for 2 different times. (b) Anisotropy factors of the grey model and inside each group of the multigroup model for the first time.

<sup>1</sup>  $B(T, \nu) = 2h\nu^3/c^2[\exp(h\nu/kT) - 1]^{-1}$  is the Planck function. It is the minimum of the radiative entropy (7).  $g_\nu$  is the first moment of the scattering angular redistribution function.

<sup>2</sup> We chose here to consider the opacities  $\sigma$  as constants inside each group. The way to choose a correct mean is most of the times very difficult and is not developed in this article.

<sup>3</sup> En fait,  $\sigma$  dépendent de la fréquence  $\nu$ , de la température de la matière  $T$  et des espèces en présence.

<sup>4</sup>  $h$  est la constante de Planck,  $k$  la constante de Boltzmann et  $c$  la vitesse de la lumière. A priori,  $c$  dépend du milieu, mais on supposera ici que les milieux considérés ont tous un indice de 1 :  $c$  est donc la vitesse de la lumière dans le vide.

<sup>5</sup> Les opacités  $\sigma$  sont supposées constantes à l’intérieur de chaque groupe de fréquence. Le calcul des valeurs moyennes à considérer est très complexe et ne sera pas développé ici.

<sup>6</sup>  $E = \sum E_m$  et  $F = \sum F_m$ , où  $\varepsilon$  est l’énergie interne (on a :  $\partial_{T_m} \varepsilon = C_v(T_m)$ ). En particulier, si  $C_v$  est constant, on peut dire que  $\varepsilon = \rho C_v T_m$ .

### Références bibliographiques

[1] P. Charrier, B. Dubroca, L. Mieussens, R. Turpault, Discrete-velocity models for numerical simulations in transitional regime for rarefied flows and radiative transfer, Accepted for publication in IMA Volumes in Mathematics and its Applications, 2001.  
 [2] B. Dubroca, J.L. Feugeas, Hiérarchie de Modèles aux Moments pour le Transfert Radiatif, 1998.  
 [3] H. Grad, On kinetic theory of the rarefied gases, Comm. Pure Appl. Math. 2 (1949) 331–407.  
 [4] D. Levermore, Relating Eddington factors to flux limiters, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer 31 (1984).  
 [5] D. Levermore, Moment closure hierarchies for kinetic theories, J. Statist. Phys. 83 (1996).  
 [6] D. Mihalas, B.W. Mihalas, Foundations of Radiation Hydrodynamics, Oxford University Press, 1984.  
 [7] G.C. Pomraning, The Equations of Radiation Hydrodynamics, Science Applications, 1973.  
 [8] R. Turpault, Modélisation et approximation numérique des équations du transfert radiatif à l’aide d’une méthode volumes finis implicite discrète en direction et en fréquence, Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I, 2000.