

Spécifications des algorithmes de triangulation de systèmes algébro-élémentaires

Anne-Mercedes Bellido, Vincent Jalby

LACO–CNRS UMR 6090, Université de Limoges, 123, avenue Albert Thomas, 87060 Limoges cedex, France

Reçu le 21 novembre 2001 ; accepté le 26 novembre 2001

Note présentée par Gilles Kahn.

Résumé

Nous formalisons des spécifications souhaitables pour un système algébro-élémentaire triangulaire dans le but de minimiser l'importance de la partie élémentaire. Une application algorithmique est donnée. Pour citer cet article : A.-M. Bellido, V. Jalby, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 155–159. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Specifications for triangulation algorithms of elementary-algebraic systems

Abstract

We formalize worthwhile specifications for triangular elementary-algebraic systems in order to minimize the importance of the elementary part. An algorithmic application is given. To cite this article: A.-M. Bellido, V. Jalby, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 155–159. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

We call *elementary-algebraic system* a system $(S = 0, E = 0)$ such that S is a list of r polynomials in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ and E is a list $(y_i - f_i(x_1, \dots, x_n))_{i=1, \dots, m}$ where f_1, \dots, f_m are m analytic functions on \mathbb{R}^n . We assume that the partial derivatives of each f_i can be written as polynomials of themselves and that each variable y_i effectively appears in S . In [8], D. Richardson uses the Wu characteristic set algorithm to obtain weak stratifications of sets defined by systems of this type. He introduces the notion of “basic condition” to select some of the elementary equations. Following his work, we define two properties of *constructible* elementary-algebraic systems $(S = 0, E = 0, Q \neq 0)$ (cf. Definition 1) that may be used as specifications for other triangulation algorithms [1,4,5,9]:

- *stability* needed for numerical computations;
- *optimality* to minimize the importance of elementary equations, keeping only a few of them to compute the solutions of the system.

DEFINITION. – A system $\Delta = (S = 0, (E_1, E_2) = 0, Q \neq 0)$ is *stable* if the set of its solutions $\text{Sol}(\Delta)$ is either empty or a submanifold of \mathbb{R}^{n+m} .

Adresses e-mail : bellido@unilim.fr (A.-M. Bellido); jalby@unilim.fr (V. Jalby).

It is *semi-optimal* if E_1 is a subset of $E = E_1 \cup E_2$ such that

for every $\alpha \in \mathbb{R}^{n+m}$ verifying Δ , there exists a neighbourhood V of α such that
 $\forall \beta \in V, (S, E_1)(\beta) = 0 \Rightarrow (E_2(\beta) = 0, Q(\beta) \neq 0)$.

If moreover E_1 is minimal for inclusion, then Δ is *optimal*.

In Theorem 4, we prove that the elementary equations of E_2 allow us to pick out the connected components of $\text{Sol}(\Delta)$ among those of the *resolvent* part ($S = 0, E_1 = 0, Q \neq 0$), testing only one point on each component.

The following theorem shows how to construct a stable optimal system. An algorithmic application to the triangular case is given in Section 3 (SOS algorithm).

THEOREM. – *Let $\Delta = (S = 0, E = 0, Q \neq 0)$ be a constructible elementary-algebraic system. We assume that there exists a subset E_1 of E , E_1 maximal for inclusion, such that the rank of $\text{Jac}(S, E_1)$ is equal to $\text{card}(S \cup E_1)$ at least for some point of $\text{Sol}(S = 0, Q \neq 0)$. Let $J_{\max}(S, E_1)$ be a maximal minor of $\text{Jac}(S, E_1)$ whose determinant is not identically zero on $\text{Sol}(S = 0, Q \neq 0)$ and $E_2 = E \setminus E_1$. Then $\Delta = (S = 0, (E_1, E_2) = 0, (Q, \det J_{\max}(S, E_1)) \neq 0)$ is a stable optimal system.*

1. Introduction

L'étude théorique de la triangulation de systèmes non-algébriques a commencé dans les années 1960 [7]. Dans la dernière décennie, des tentatives ont été faites pour rendre effectifs ces résultats [6] mais les algorithmes proposés sont encore peu efficaces en pratique. D. Richardson [8] a étudié l'adaptation à ces systèmes de la méthode de Wu–Ritt utilisée dans le cas algébrique. Récemment, des méthodes plus efficaces de triangulation algébrique ont été développées [1,4,5,9]. Afin d'adapter ces nouvelles méthodes et dans l'esprit des travaux de D. Richardson [8], nous nous fixons pour objectif de minimiser l'importance de la partie élémentaire. Pour cela, nous formalisons clairement des spécifications souhaitables pour un système algébro-élémentaire triangulaire :

- la *stabilité* qui est demandée pour d'éventuelles applications numériques ;
- l'*optimalité* qui permet de minimiser l'importance des équations élémentaires en ne conservant que certaines d'entre elles pour l'essentiel de la résolution du système.

Nous montrons que les équations élémentaires restantes permettent de sélectionner les composantes connexes solutions du système parmi celles solutions d'un système résolvant associé, en testant un seul point de chacune d'elles. Le théorème principal décrit la construction théorique d'un système optimal stable à partir d'un système donné. Enfin, nous proposons une première application de ces résultats sous forme d'un algorithme (SOS) dans le cas d'un système triangulaire.

2. Stabilité et optimalité des systèmes algébro-élémentaires

Soit \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{R} et $n + m$ variables ordonnées $x_1 < \dots < x_n < y_1 < \dots < y_m$.

DÉFINITION 1. – Un système *algébro-élémentaire* est un système $(S = 0, E = 0)$ tel que S est une liste p_1, \dots, p_r de r polynômes de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ et E est une liste $(y_i - f_i(x_1, \dots, x_n))_{i=1, \dots, m}$ où f_1, \dots, f_m sont m fonctions analytiques sur \mathbb{R}^n . On suppose que les dérivées partielles des f_i peuvent s'écrire comme polynômes d'elles-mêmes et que chaque variable y_i apparaît effectivement dans le système S .

Un système algébro-élémentaire *constructible* est un système de la forme $\Sigma = (S = 0, E = 0, Q \neq 0)$ où $(S = 0, E = 0)$ est un système algébro-élémentaire et Q une liste finie de polynômes de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$. La notation $Q \neq 0$ signifie que, pour chaque q de Q , on doit avoir $q \neq 0$.

On utilise aussi les notations suivantes :

- $\text{mvar}(p)$ désigne la variable principale d'un polynôme $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$, c'est-à-dire la plus grande variable apparaissant dans p ;
- $\text{mvar}(S, E)$ désigne la liste des variables principales de S complétée par les variables y_i apparaissant dans E et $\overline{\text{mvar}}(S, E)$ la liste des variables restantes ;
- $\text{Jac}(Z/(z))$ désigne la matrice jacobienne d'un système Z par rapport à une liste de variables (z) et $\text{Jac}(Z)$ la matrice jacobienne par rapport à toutes ses variables.

Un système algébrique S est dit *triangulaire* si pour chaque $i = 1, \dots, r - 1$, on a $\text{mvar}(p_i) < \text{mvar}(p_{i+1})$. Par extension, un système algébro-élémentaire est dit triangulaire dès que sa partie algébrique est triangulaire.

DÉFINITION 2. – On dit qu'un système algébro-élémentaire constructible $\Delta = (S = 0, E = 0, Q \neq 0)$ est *stable* si l'ensemble de ses solutions $\text{Sol}(\Delta)$ est soit vide soit une sous-variété différentielle de \mathbb{R}^{n+m} .

Il est clair que si le rang de $\text{Jac}(S, E)$ est égal à $\text{card}(S \cup E)$ sur Δ , alors le système Δ est un système stable.

DÉFINITION 3. – Un système algébro-élémentaire constructible $\Delta = (S = 0, (E_1, E_2) = 0, Q \neq 0)$ est dit *semi-optimal* si E_1 est un sous-ensemble de $E = E_1 \cup E_2$ tel que

$$\text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}^{n+m} \text{ vérifiant } \Delta, \text{ il existe un voisinage } V \text{ de } \alpha \text{ tel que} \\ \forall \beta \in V, \quad (S, E_1)(\beta) = 0 \Rightarrow (E_2(\beta) = 0, Q(\beta) \neq 0).$$

Si de plus E_1 est minimal au sens de l'inclusion, alors Δ est dit *optimal*.

On appelle respectivement E_1 et E_2 partie *résolvante* et partie *validante* de Δ .

THÉORÈME 4. – Soit $\Delta = (S = 0, (E_1, E_2) = 0, Q \neq 0)$ un système semi-optimal et $\Delta_1 = (S = 0, E_1 = 0, Q \neq 0)$ le système résolvant associé. Alors l'ensemble $\text{Sol}(\Delta)$ des solutions de Δ est l'union des composantes connexes C de $\text{Sol}(\Delta_1)$ telles qu'il existe un point de C vérifiant E_2 .

COROLLAIRE 5. – Si $\Delta = (S = 0, (E_1, E_2) = 0, Q \neq 0)$ est semi-optimal et si $\Delta_1 = (S = 0, E_1 = 0, Q \neq 0)$ est stable, alors Δ est stable et $\dim \text{Sol}(\Delta_1) = \dim \text{Sol}(\Delta)$.

Le résultat principal de cette section est énoncé dans le théorème suivant. Il décrit l'obtention théorique d'un système optimal stable et est utilisé dans la preuve de l'algorithme donné dans la dernière section.

THÉORÈME 6. – Soit $\Delta = (S = 0, E = 0, Q \neq 0)$ un système algébro-élémentaire constructible. On suppose qu'il existe un sous-ensemble E_1 de E maximal au sens de l'inclusion tel que $\text{Jac}(S, E_1)$ soit de rang égal à $\text{card}(S \cup E_1)$ en au moins un point de $\text{Sol}(S = 0, Q \neq 0)$. Soit $J_{\max}(S, E_1)$ un mineur maximal de $\text{Jac}(S, E_1)$ de déterminant non identiquement nul sur $\text{Sol}(S = 0, Q \neq 0)$ et $E_2 = E \setminus E_1$.

Alors $\tilde{\Delta} = (S = 0, (E_1, E_2) = 0, (Q, \det J_{\max}(S, E_1)) \neq 0)$ est un système optimal stable.

Remarques. – 1. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel E_1 existe, est qu'on ait $r \leq n + m$ et que $\text{Jac}(S)$ soit de rang maximal en au moins un point de $\text{Sol}(S = 0, Q \neq 0)$. Dans le cas triangulaire, il est naturel d'utiliser la condition suffisante $\det \text{Jac}(T, \text{mvar}(T))$ non nul en au moins un point de $\text{Sol}(T = 0, Q \neq 0)$.

2. L'ensemble E_1 est aussi maximal au sens de la cardinalité. En effet, $\text{Jac}(S, E_1)$ étant de rang maximal en un point α de $\text{Sol}(S = 0, Q \neq 0)$, on peut compléter E_1 en \tilde{E}_1 pour que $\text{rang Jac}(S, \tilde{E}_1)(\alpha) = \text{rang Jac}(S, E)(\alpha)$. Comme E_1 est supposé maximal pour l'inclusion, $E_1 = \tilde{E}_1$ et $\text{rang Jac}(S, E_1)(\alpha) = \text{card}(S \cup E_1) = \text{rang Jac}(S, E)(\alpha)$. Donc, $\text{card } E_1 = \text{rang Jac}(S, E)(\alpha) - r$.

3. On peut écrire une version plus algébrique du théorème en imposant que $\text{Jac}(S, E_1)$ soit de rang égal à $\text{card}(S \cup E_1)$ dans l'espace quotient $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]/(S)$.

4. On peut montrer que pour un mineur maximal $J_{\max}(S, E_1)$ bien choisi, le système $\tilde{\Delta}$ donné par le théorème 6 est une « basic condition » [8].

3. Application algorithmique au cas triangulaire

Nous proposons comme exemple d'application de la section précédente un algorithme de transformation d'un système algébro-élémentaire triangulaire constructible en un système optimal stable (SOS). Pour simplifier la présentation, nous supposons que le système étudié est régulier et séparable, c'est-à-dire que sa partie algébrique l'est au sens de [2]. Cela évite de gérer dans l'algorithme les cas où les coefficients initiaux ou bien le jacobien de la partie algébrique s'annulent trivialement.

Cet algorithme utilise la notion de pseudo-reste [1] comme outil technique :

- pour deux polynômes p et q multivariés, on désigne par $\text{prem}(p, q)$ le pseudo-reste de p par q où p et q sont considérés comme des polynômes de la seule variable $\text{mvar}(q)$;
- le pseudo-reste $\text{prem}(p, T)$ de p par un système triangulaire $T = (t_1, \dots, t_s)$, est défini de façon récursive par $\text{prem}(p, (t_1, \dots, t_k)) = \text{prem}(\text{prem}(p, t_k), (t_1, \dots, t_{k-1}))$. On a alors la formule :

$$\left(\prod_{i=1}^s \text{init}(t_i)^{\alpha_i} \right) p = \sum_{i=1}^s q_i t_i + \text{prem}(p, T),$$

où, pour tout i , $\text{init}(t_i)$ désigne le coefficient principal de t_i , α_i est un entier naturel et q_i est un polynôme.

L'algorithme principal utilise la variante suivante de l'algorithme de Gauss :

PROCÉDURE $\widetilde{\text{Gauss}}(M, T)$. – Étant donné une matrice M à coefficients polynomiaux (non nécessairement carrée) et un système triangulaire T , cet algorithme retourne un couple (M', σ) où

- M' est une matrice triangulaire inférieure telle que si le pseudo-reste par T d'un des coefficients de la diagonale de M' est nul, alors il en est de même pour les coefficients situés au-dessous dans la même colonne ;
- σ est une permutation sur les lignes de M .

Plus précisément, il s'agit d'une méthode de Gauss–Bareiss classique [3] sur les colonnes dans laquelle on teste la non-nullité d'un pivot p par $\text{prem}(p, T) \neq 0$. Si à une étape donnée, il n'y a pas de pivot non nul dans la ligne considérée, on la permute avec une des lignes au-dessous. On note σ l'éventuelle permutation de lignes générée par cette méthode.

ALGORITHME SOS. – Soit $\Delta = (T = 0, E = 0, Q \neq 0)$ un système triangulaire algébro-élémentaire constructible régulier et séparable. Alors le système $\widetilde{\Delta}$ obtenu en sortie de l'algorithme ci-dessous est un système optimal stable.

Étape 0 :

$$I := \prod_{p \in T} \text{init}(p) ;$$

$$E'_1 := \text{le plus petit sous-ensemble de } E \text{ tel que } \text{mvar}(T \cup E) = \text{mvar}(T \cup E'_1) ;$$

$$E'_2 := E \setminus E'_1 ;$$

$$T_1 := \{p \in T : \text{mvar}(p) \in \{x_1, \dots, x_n\}\} ;$$

$$T_2 := T \setminus T_1 ;$$

Étape 1 :

$$\text{Jac} := \text{Jac}(T_1, E'_1, T_2, E'_2 / \text{mvar}(T_1, E'_1, T_2), \overline{\text{mvar}}(T_1, E'_1, T_2)) ;$$

$$J := \text{Jac}(T_1, E'_1, T_2 / \text{mvar}(T_1, E'_1, T_2)) ;$$

$$A, B, C \text{ tels que } \text{Jac} = \begin{pmatrix} J & A \\ B & C \end{pmatrix} ;$$

Étape 2a :

$\text{Jac}' := \begin{pmatrix} J & 0 \\ B & C' \end{pmatrix}$ où Jac' est obtenue à partir de Jac en faisant apparaître des zéros à la place de la matrice A par une méthode de type Gauss–Bareiss sur les colonnes ;

Étape 2b :

$$(C'', \sigma) := \widetilde{\text{Gauss}}(C', T) \text{ avec } C'' = (c''_{ij});$$

$$\sigma(B) := (b_{\sigma(i)j});$$

$$\text{Jac}'' := \begin{pmatrix} J & 0 \\ \sigma(B) & C'' \end{pmatrix};$$

Étape 3 :

$$E_2 := \{e_i \in E'_2 : \text{prem}(c''_{\sigma(i)\sigma(i)}, T) = 0\};$$

$$E_1 := E \setminus E_2;$$

$$\det_{\max} := \det J \times \prod_{e_i \in E'_2 \setminus E_2} c''_{\sigma(i)\sigma(i)};$$

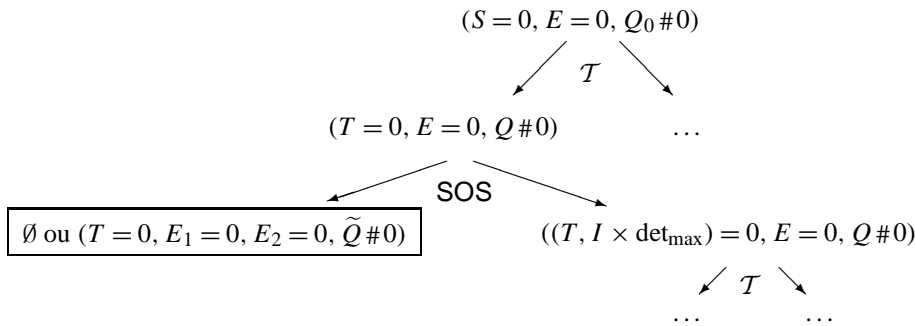
$$\tilde{Q} := (Q, I \times \det_{\max});$$

Étape 4 :

Si $\text{prem}(I \times \det_{\max}, T) = 0$ alors $\tilde{\Delta} := \emptyset$ sinon $\tilde{\Delta} := (T = 0, (E_1, E_2) = 0, \tilde{Q} \neq 0)$.

Remarques. – 1. On pourrait envisager une méthode plus fine de sélection des équations de E_2 , mais la méthode proposée ici nous paraît un compromis acceptable entre la complexité de l’algorithme de sélection et l’efficacité de l’algorithme SOS.

2. Dans la pratique, l’algorithme SOS peut être inséré dans un algorithme de triangulation T de la partie algébrique d’un système algébro-élémentaire de la façon suivante :



L’étude de la convergence de cette méthode ainsi que l’adaptation des algorithmes de triangulation T aux spécifications de la section 2 font l’objet d’un travail en cours.

Références bibliographiques

[1] Aubry P., Lazard D., Moreno Maza M., On the theory of triangular sets, *J. Symbolic Comput.* 28 (1999) 105–124.
 [2] Aubry P., Moreno Maza M., Triangular sets for solving polynomial systems; a comparative implementation of four methods, *J. Symbolic Comput.* 28 (1999) 125–154.
 [3] Bareiss E.H., Sylvester’s identity and multistep integer preserving Gaussian elimination, *Math. Comp.* 22 (1968) 565–578.
 [4] Dellièrre S., On the link between triangular set and dynamic constructible closure, *J. Pure Appl. Algebra* 163 (2001) 49–68.
 [5] Duval D., Gómez-Díaz T., A lazy method for triangularizing polynomial systems, *Publications du LACO* 4 (1995).
 [6] Gabrielov A., Vorobjov N., Complexity of stratifications of semi-Pfaffian sets, *Discrete Comput. Geom.* 14 (1995) 71–91.
 [7] Losajiewicz S., Triangulation of semi-analytic sets, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 18 (1964) 449–474.
 [8] Richardson D., Weak Wu stratification in \mathbb{R}^n , *J. Symbolic Comput.* 28 (1999) 213–223.
 [9] Wang D., Decomposing polynomial systems into simple systems, *J. Symbolic Comput.* 16 (1998) 83–114.